

Aufgabe 8.1

Die Determinante ist eine Funktion, die jeder quadratischen Matrix A eindeutig eine Zahl $\det(A)$ zuordnet.

Aufgabe 8.2

(a) $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}; \det(A) = 8$

(b) $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \det(B) = -8$

(c) $C = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \det(C) = 0$

(d) A, B

Aufgabe 8.3

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \det(A) = 1$

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \det(B) = 1$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \det(C) = 1$

Aufgabe 8.4

(a) $\det \begin{pmatrix} x \cdot a & x \cdot b & x \cdot c \\ d & e & f \\ z \cdot g & z \cdot h & z \cdot i \end{pmatrix} = xy \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

(b) $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+x & e+y & f+z \\ g & h & i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Aufgabe 8.5

$$(a) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$(c) \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -6$$

$$(b) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$(d) \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 8.6

Gegeben: $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $\det(A) = 7$ und $\det(B) = -2$

$$(a) \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$(b) \det(A^T) = \det(A) = 7$$

$$(c) \det(2A) = 2^3 \det(A) = 56$$

$$(d) \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = -14$$

Aufgabe 8.7

- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen verändert die Determinante nicht.
- Vertauschen zweier Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante.
- Multiplikation einer Zeile mit dem Faktor a bedeutet Multiplikation der Determinante mit a .
- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 4 \\ 8 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -40 \end{aligned}$$

Aufgabe 8.8

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 16 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot (-4) + 12 \cdot (-2) - 16 \cdot 0 = -8 \end{aligned}$$

Aufgabe 8.9

Eine *singuläre* Matrix A ist eine quadratische Matrix, die nicht invertierbar ist, d. h. für die $\det(A) = 0$ gilt.

Aufgabe 8.10

Eine *reguläre* Matrix A ist eine quadratische Matrix, die invertierbar ist, d. h. für die $\det(A) \neq 0$ gilt.

Aufgabe 8.11

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 6 & a & 0 \\ 7 & 8 & a \end{vmatrix} = \dots = a^2 - 10a - 96 = 0$$

$$a_1 = 16, a_2 = -6$$