### Aufgabe 5.1

(a) $A^{-1} = \dfrac{1}{6-5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A^{-1} = \dfrac{1}{8+12}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/20 \\ -1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$

(c) $A^{-1} = \dfrac{1}{0}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert

(d) $A^{-1} = \dfrac{1}{6-0}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

### Aufgabe 5.2

Im Allgemeinen nein, denn $(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB$.

Gilt jedoch ausnahmsweise $AB = BA$, so erhält man:

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB = AABB = (AA)(BB) = A^2B^2$$

### Aufgabe 5.3

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{pmatrix}$

(b) $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1 \\ 1/7 & 3/7 \end{pmatrix}$

(c) $A = (5A^T)^{-1} = \left[\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\right]^T = \begin{pmatrix} -2/5 & 1 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

(d) $A = \dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -9/13 & 1/13 \\ 2/13 & -6/13 \end{pmatrix}$

### Aufgabe 5.4

(a) $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 28 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A^{-3} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ -7/2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A^2 - 2A + I = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5.5**

$$M^{-1} = \frac{1}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5.6**

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

Berechnet man das Produkt der Matrizen links, und vergleicht mit den entsprechenden Elementen rechts, so ergibt sich:

$$\begin{array}{cccc}
a_{11}b_{11} = 1 & a_{11}b_{12} = 0 & \dots & a_{11}b_{1n} = 0 \\
a_{22}b_{21} = 0 & a_{22}b_{22} = 1 & \dots & a_{22}b_{2n} = 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{nn}b_{n1} = 0 & a_{nn}b_{n2} = 0 & \dots & a_{nn}b_{2n} = 1
\end{array}$$

Da nach Voraussetzung alle Elemente $a_{11}$, $a_{22}$, …, $a_{nn}$ nicht null sind, müssen die Elemente $b_{ij}$ mit $j \neq i$ den Wert Null haben.

Für die Diagonalelemente gilt: $b_{ii} = 1/a_{ii}$ $(i = 1, \dots, n)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1/a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn}\end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5.7**

$$\begin{aligned}
A^2 - 3A + I = 0 \quad \Rightarrow \quad I &= 3A - A^2 \\
I &= A\underbrace{(3I - A)}_{A^{-1}} \\
I &= AA^{-1} \\
I &= I
\end{aligned}$$

**Aufgabe 5.8**

Das Beweisprinzip soll an einer $3 \times 3$-Matrix gezeigt werden.

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ mit einer Nullzeile (z. B. am Ende)}$$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ eine potenzielle Inverse von $A$.

Das Produkt $AB$ muss folgende Gleichung erfüllen:

$$AB = \cdots = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} & c_{22} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist wegen des Elements 1 unten rechts nicht möglich.

## Aufgabe 5.9

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 5.10

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & -8 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 5.11

(a) $B + B^T$ ist symmetrisch, wenn $(B + B^T)^T = B + B^T$ gilt.

*Beweis:*

$$\left(B + B^T\right)^T = B^T + \left(B^T\right)^T = B^T + B = B + B^T \qquad \square$$

(b) $BB^T$ ist symmetrisch, wenn $(BB^T)^T = BB^T$ gilt.

*Beweis:*

$$\left(BB^T\right)^T = \left(B^T\right)^T B^T = BB^T \qquad \square$$

(c) $B - B^T$ ist schiefsymmetrisch, wenn $\left(B - B^T\right)^T = -(B + B^T)$ gilt.

*Beweis:*

$$\left(B - B^T\right)^T = B^T - \left(B^T\right)^T = B^T - B = -(B + B^T) \qquad \square$$

**Aufgabe 5.12**

- Verankerung ($n = 1$): $\left(A^1\right)^T = A^T = \left(A^T\right)^1$
- Induktionshypothese: Die Aussage sei wahr für ein $n \geq 1$.

  Induktionsschritt ($n \to n + 1$):

$$\begin{aligned}\left(A^{n+1}\right)^T &= \left(A^n A\right)^T = A^T \left(A^n\right)^T \\ &\overset{IV}{=} A^T \left(A^T\right)^n = \left(A^T\right)^1 \left(A^T\right)^n = \left(A^T\right)^{n+1}\end{aligned}$$

$\square$

**Aufgabe 5.13**

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A$ ist nilpotent mit Index $k = 3$.

(b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \dots$

$A$ ist weder nilpotent noch periodisch

(c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$

$A$ ist periodisch mit $p = 2$.