

**Aufgabe 5.1**

Man berechne mit dem Satz aus dem Skript die Inverse der Matrix  $A$ , sofern sie existiert.

(a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(c)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

(d)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5.2**

Seien  $A$  und  $B$  quadratische Matrizen gleichen Formats. Gilt dann  $(AB)^2 = A^2B^2$ ? Begründe deine Antwort.

**Aufgabe 5.3**

Berechne die Matrix  $A$ :

(a)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$(b) (7A)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(c) (5A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) (I + 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

#### Aufgabe 5.4

Gegeben ist die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Berechne:

(a)  $A^3$

(b)  $A^{-3}$

(c)  $A^2 - 2A + I$

#### Aufgabe 5.5

Berechne die Inverse von  $M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ .

### Aufgabe 5.6

Man betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit  $a_{11} \neq 0$ ,  $a_{22} \neq 0$ ,  $\dots$ ,  $a_{nn} \neq 0$ . Man zeige dass  $A$  invertierbar ist und berechne ihre Inverse.

### Aufgabe 5.7

Die quadratische Matrix  $A$  genüge der Gleichung  $A^2 - 3A + I = 0$ . Man zeige, dass  $A^{-1} = 3I - A$  ist.

### Aufgabe 5.8

Man zeige, dass eine Matrix, die eine Nullzeile enthält, nicht invertierbar ist.

### Aufgabe 5.9

Die reelle Gleichung  $a^2 = 1$  hat genau zwei Lösungen. Man bestimme vier verschiedene  $3 \times 3$ -Matrizen, die die Gleichung  $A^2 = I$  erfüllen. *Hinweis:* Betrachte die Lösungen, die ausserhalb der Diagonalen nur Nullen enthalten.

### Aufgabe 5.10

(a) Man bestimme eine  $3 \times 3$ -Matrix  $A \neq 0$  mit  $A^T = A$ .

(b) Man bestimme eine  $3 \times 3$ -Matrix  $A \neq 0$  mit  $A^T = -A$ .

### Aufgabe 5.11

Eine quadratische Matrix  $A$  heisst *symmetrisch*, wenn  $A^T = A$  gilt; sie heisst *schiefsymmetrisch*, falls  $A^T = -A$  ist. Man zeige für eine quadratische Matrix  $B$ :

(a)  $B + B^T$  ist symmetrisch

(b)  $BB^T$  ist symmetrisch

(c)  $B - B^T$  ist schiefsymmetrisch

### Aufgabe 5.12

Beweise mit vollständiger Induktion nach  $n$ : Für eine quadratische Matrix  $A$  und eine natürliche Zahl  $n$  gilt stets  $(A^n)^T = (A^T)^n$

### Aufgabe 5.13

Untersuche, ob die Matrix  $A$  periodisch, nilpotent oder idempotent ist. Falls ja, gib die Periode  $p$  bzw. den Index  $k$  an.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$