

Worum geht es?

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz kann man die Determinante einer $(n \times n)$ -Matrix nach einer Zeile oder Spalte entwickeln. Die beiden Formeln lauten:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte}$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix ist, die durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte von A entsteht.

Beispiel

Es sollen die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

berechnet, d. h. $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ gelöst werden.

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ & \quad + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ & \quad + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((5-\lambda)(3-\lambda) - 0) - 3(0 - 0) + 3(0 - (5-\lambda)) \\ &= (1-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) - 3(5-\lambda) \\ &= (5-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) - 3) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda) \\ &= (5-\lambda)\lambda(\lambda - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ & \quad + (-1)^{2+2} \cdot (5-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ & \quad + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) - 3) \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda) \\ &= (5-\lambda)\lambda(\lambda - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Vor- und Nachteile

Die Formel eignet wegen des faktoriellen Aufwands nur für Determinantenberechnungen sehr kleiner Matrizen, für Spezialfälle oder als Hilfsmittel für Beweise im Zusammenhang mit Determinanten (siehe unten).

Satz

Ist A eine obere oder eine untere $(n \times n)$ Dreiecksmatrix, so sind die Eigenwerte die Diagonalelemente $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$.

Beweis: Entwickelt man folgende Determinante nach der ersten Spalte und danach alle weiteren Untermatrizen nach dem ersten Element oben links, so erhält man eine Gleichung, die von den Diagonalelementen gelöst wird.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} (a_{1,1} - \lambda) & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & (a_{2,2} - \lambda) & a_{2,3} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & (a_{3,3} - \lambda) & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (a_{n-1,n-1} - \lambda) & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (a_{n,n} - \lambda) \end{vmatrix} \\ &= (a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda)(a_{3,3} - \lambda) \dots (a_{n,n} - \lambda) = 0 \end{aligned}$$