

Das Eigenwertproblem

Gegeben: quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Beispiel 1

Sind $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$?

$$A \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja (EW } \lambda_1 = 5)$$

$$A \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja (EW } \lambda_2 = 0)$$

Systematische Bestimmung der Eigenwerte

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0} \quad (I: \text{Einheitsmatrix})$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \quad (*)$$

- $(A - \lambda I)$ invertierbar $\Rightarrow$ nur $\vec{v} = \vec{0}$ löst $(*)$ *uninteressant!*
- $(A - \lambda I)$ nicht invertierbar $\Rightarrow (*)$ hat Lösungen $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$(A - \lambda I) \text{ nicht invertierbar} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

Beispiel 2

Bestimme die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$$

Beispiel 3

Berechne die Eigenvektoren (Eigenräume) der Matrix aus Beispiel 2.

Es muss $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ gelten.

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ Eigenraum von } \lambda_1$$

$$\lambda_1 = 4: \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -x + 2y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$
$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ Eigenraum von } \lambda_2$$

Satz 1

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

- Das Produkt aller Eigenwerte von A ist gleich $\det(A)$.
- Die Summe aller Eigenwerte von A ist gleich $\text{tr}(A)$ [Spur von A].

Beispiel 4

Überprüfe die Eigenwerte von Beispiel 2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$$

$$\det(A) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4 \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ (stimmt)}$$

$$\text{tr}(A) = 3 + 2 = 5 \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 4 = 5 \text{ (stimmt)}$$

Satz 2

Ist A eine quadratische Matrix mit einem Eigenwert λ und dem zugehörigen Eigenvektor $\vec{v}$, dann gilt:

- λ^n ist Eigenwert von A^n .
- $\vec{v}$ ist Eigenvektor von A^n .

Beweis:

$$A^2 \vec{v} = A(A \vec{v}) = A \lambda \vec{v} = \lambda A \vec{v} = \lambda \lambda \vec{v} = \lambda^2 \vec{v}$$

$$A^3 \vec{v} = A(A^2 \vec{v}) = A \lambda^2 \vec{v} = \lambda^2 A \vec{v} = \lambda^2 \lambda \vec{v} = \lambda^3 \vec{v}$$

...

$$A^n \vec{v} = A(A^{n-1} \vec{v}) = A \lambda^{n-1} \vec{v} = \lambda^{n-1} A \vec{v} = \lambda^{n-1} \lambda \vec{v} = \lambda^n \vec{v}$$

Beispiel 5

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und A^2 .

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \\ 2 - \lambda = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3: \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren von A^2 :

$$\lambda_1 = 1^2 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 3^2 = 9, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierung quadratischer Matrizen

Ziel: einfache Berechnung von A^n für grosse n

Voraussetzungen: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

$$P \stackrel{\text{Def.}}{=} (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots | \vec{v}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ aus den } n \text{ Eigenvektoren}$$

$$D \stackrel{\text{Def.}}{=} (\lambda_1 \vec{e}_1 | \lambda_2 \vec{e}_2 | \dots | \lambda_n \vec{e}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ mit Standardbasis } \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$$

$$AP = A(\vec{v}_1 | \dots | \vec{v}_n) = (A\vec{v}_1 | \dots | A\vec{v}_n) = (\lambda_1 \vec{v}_1 | \dots | \lambda_n \vec{v}_n)$$

$$PD = P(\lambda_1 \vec{e}_1 | \dots | \lambda_n \vec{e}_n) = (\lambda_1 P\vec{e}_1 | \dots | \lambda_n P\vec{e}_n) = (\lambda_1 \vec{v}_1 | \dots | \lambda_n \vec{v}_n)$$

$$\Rightarrow AP = PD \quad \stackrel{*}{\Rightarrow} \quad A = PDP^{-1} \quad \text{und} \quad D = P^{-1}AP$$

(*) Wenn alle Eigenvektoren linear unabhängig sind, ist P invertierbar.

Satz 3

Wir fassen zusammen: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit n linear unabhängigen Eigenvektoren so lässt sich A wie folgt als Produkt darstellen:

$$A = PDP^{-1}$$

Dabei sind $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix aus den n Eigenvektoren von A und D die Diagonalmatrix mit den n korrespondierenden Eigenwerten auf der Diagonalen.

Berechnen von Matrixpotenzen für grosse n

Beim Berechnen von A^n mit Satz 3 lassen sich aufgrund des Assoziativgesetzes die Produkte $P \cdot P^{-1}$ zusammenfassen und „wegkürzen“.

$$A^n = \underbrace{PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \dots \cdot PDP^{-1}}_{n \text{ Faktoren}} = PD \underbrace{(P^{-1}P)}_I D \cdot \dots \cdot D \cdot \underbrace{(P^{-1}P)}_I DP^{-1} = PD^n P^{-1}$$

Beispiel 6

Zeige, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 2 diagonalisierbar ist und berechne A^n .

Die Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 1$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = 4$ sind linear unabhängig.

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 4^n \\ -1 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^n + 1 & 2 \cdot 4^n - 2 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diagonalisierung symmetrischer Matrizen

Eine quadratische Matrix heisst *symmetrisch* wenn $A = A^T$ gilt. Symmetrische Matrizen haben zwei vorteilhafte Eigenschaften:

1. Eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix hat nur reelle Eigenwerte.
2. Es gibt immer n Eigenvektoren und diese können orthonormal gewählt werden.

Will man eine symmetrische Matrix diagonalisieren, so gilt:

Satz 6

Jede symmetrische Matrix hat eine Faktorisierung $Q\Lambda Q^T$ mit einer reellen Diagonalmatrix D und einer orthogonalen Matrix Q , so dass $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$ mit $Q^{-1} = Q^T$

Beispiel 7

Die symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 5$ sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normieren}} Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Q\Lambda Q^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$