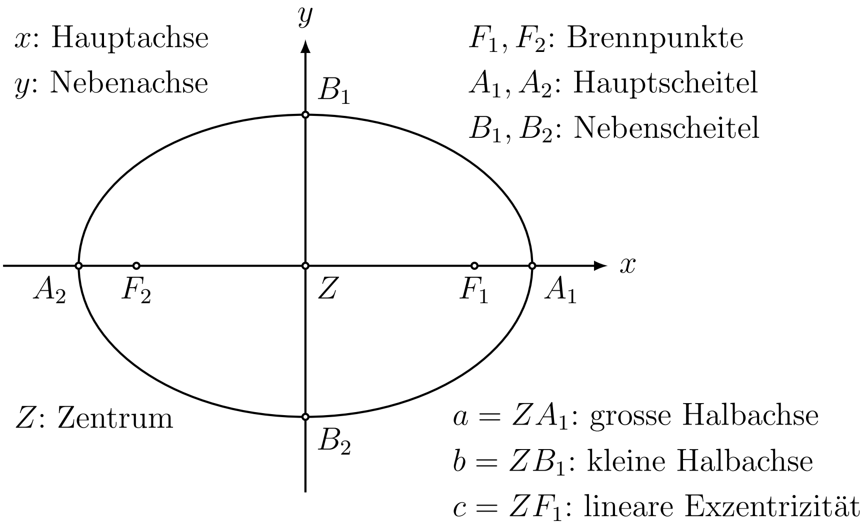
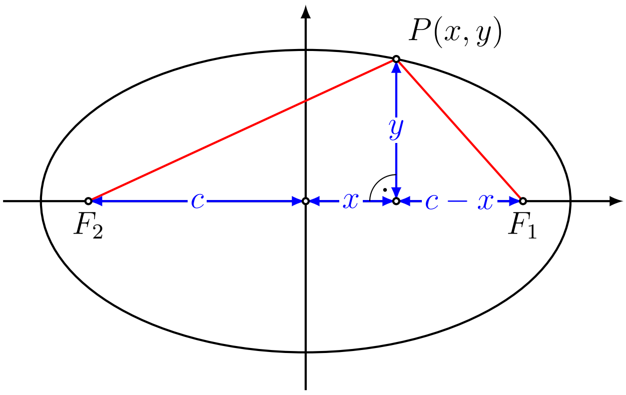
Aufgabe 1



Aufgabe 2



$$\overline{PF_2} + \overline{PF_1} = 2a \quad \text{(Formelsammlung)}$$

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a \quad (2 \times \text{Satz des Pythagoras})$$

Wegen $c + x = x + c$ und $(c-x)^2 = (x-c)^2$ ist auch $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ richtig.

Aufgabe 3

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$$

grosse Halbachse: $a = \sqrt{7}$, kleine Halbachse: $b = 2$

Aufgabe 4

$k\colon \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

(a) $P(1,2)\colon \dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{3} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad P \notin k$

(b) $P(2,1)\colon \dfrac{4}{6} + \dfrac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad P \in k$

(c) $P(0,0)\colon \dfrac{0}{6} + \dfrac{0}{3} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad P \notin k$

(d) $P\big(\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)\colon \dfrac{2}{6} + \dfrac{2}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad P \in k$

(e) $P\big(3, -1\big)\colon \dfrac{9}{6} + \dfrac{1}{3} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad P \notin k$

(f) $P\big(0, \sqrt{3}\big) \quad \dfrac{0}{6} + \dfrac{3}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad P \in k$

Aufgabe 5

(a) $P(x,1)\colon \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{1}{4} = 1$

$$\frac{x^2}{12} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$$

(b) $P(3,y)\colon \dfrac{9}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$$\frac{y^2}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

(c) $P(a,a)\colon \dfrac{a^2}{12} + \dfrac{a^2}{4} = 1$

$$\frac{a^2}{12} + \frac{3a^2}{12} = \frac{4a^2}{12} = \frac{a^2}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{3}$$

Aufgabe 6

(a) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{11} = 1$

(b) $c^2 = a^2 - b^2 \;\Rightarrow\; b^2 = a^2 - c^2 = 9 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(c) $c^2 = a^2 - b^2 \;\Rightarrow\; a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 7 = 16 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

(d) $P(6,4) \in$ Ellipse: $\dfrac{36}{a^2} + \dfrac{16}{b^2} = 1 \quad (1)$

$Q(8,3) \in$ Ellipse: $\dfrac{64}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \quad (2)$

$9 \cdot (1) - 16 \cdot (2)$: $-\dfrac{700}{a^2} = -7 \quad || : (-7)$

$$\dfrac{100}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 10$$

(2): $\dfrac{36}{100} + \dfrac{16}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{16}{b^2} = \dfrac{64}{100} \;\Rightarrow\; b^2 = 25 \;\Rightarrow\; b = 5$

Aufgabe 7

Gegeben: $k_1\colon \dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ und $k_2\colon \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

(a) k_1: $a_1 = \sqrt{7}$, $b_1 = \sqrt{3}$

lineare Exzentrizität: $c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{7-3} = 2$

numerische Exzentrizität: $\varepsilon_1 = \dfrac{c_1}{a_1} = \dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

k_2: $a_2 = \sqrt{6}$, $b_2 = \sqrt{2}$

lineare Exzentrizität: $c_2 = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} = \sqrt{6-2} = 2$

numerische Exzentrizität: $\varepsilon_2 = \dfrac{c_2}{a_2} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{6}$

(b) Für $c = 0$ gilt $0^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a = b \Rightarrow$ Ellipse ist Kreis

Somit hat für $c = 0$ auch die numerische Exzentrizität den Wert $\varepsilon = 0/a = 0$. Also gleicht eine Ellipse umso mehr einem Kreis, je näher ε bei 0 liegt.

Somit folgt aus $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow k_1$ hat mehr die Form eines Kreises als k_2.

Aufgabe 8

(a) $k_1\colon \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$:

$a = 5,\ b = 2 \quad \Rightarrow \quad A = ab\pi = 5 \cdot 2 \cdot \pi = 10\pi$

(b) $k_1\colon \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$:

$a = \sqrt{8},\ b = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad A = ab\pi = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi = 4\pi$

Aufgabe 9

Gegeben: $k\colon \dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{100} = 1$ und $g\colon y = \dfrac{2}{3}x + 14$

$k\colon 100x^2 + 225y^2 = 22\,500$

$g\colon 3y = 2x + 42 \quad \Rightarrow \quad 2x = 3y - 42$

g geschickt in k einsetzen:

$$\begin{aligned}
25 \cdot (2x)^2 + 225y^2 &= 22\,500 \\
25 \cdot (3y - 42)^2 + 225y^2 &= 22\,500 \\
(3y - 42)^2 + 9y^2 &= 900 \\
9y^2 - 252y + 1764 + 9y^2 &= 900 \\
18y^2 - 252y + 864 &= 0 \\
y_1 = 6 \ \Rightarrow\ x_1 = -12 \ \Rightarrow\ S_1(-12, 6) \\
y_2 = 8; \Rightarrow\ x_2 = -9 \ \Rightarrow\ S_2(-9, 8)
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

$k\colon \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1;\ P(4, y)$

$x = 4\colon \dfrac{16}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \dfrac{y^2}{5} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow y = 1\ (y > 1)$

Tangentengleichung: $t\colon \dfrac{x_P \cdot x}{20} + \dfrac{y_P \cdot y}{5} = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{4x}{20} + \frac{y}{5} &= 1 \\
\frac{x}{5} + \frac{y}{5} &= 1 \\
x + y &= 5 \quad \text{oder: } y = -x + 5
\end{aligned}$$

Aufgabe 11

$k\colon \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1;\ P(6,1)$

Polare zum Pol P der Ellipse: $\dfrac{6 \cdot x}{20} + \dfrac{1 \cdot y}{5} = 1 \Rightarrow \dfrac{3x}{10} + \dfrac{y}{5} = 1$

$k\colon x^2 + 4y^2 = 20$

$$g\colon 3x + 2y = 10 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2y &= 10 - 3x \quad (*) \\ (2y)^2 &= (10-3x)^2 \\ 4y^2 &= 100 - 60x + 9x^2 \quad \text{in } k \text{ einsetzen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + \underbrace{100 - 60x + 9x^2}_{4y^2} &= 20 \\ 10x^2 - 60x + 80 &= 0 \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ (x-2)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

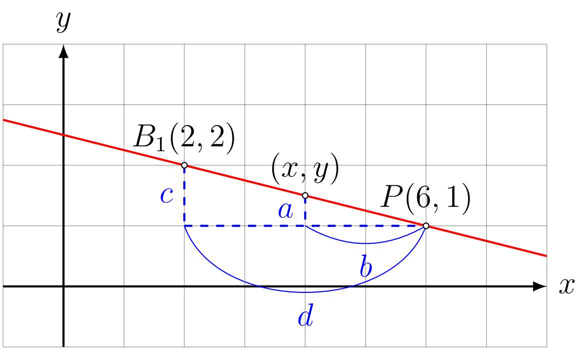
$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \quad \Rightarrow \quad 2y_1 = 10 - 3 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2 \\ y_2 &= 4 \quad \Rightarrow \quad 2y_2 = 10 - 3 \cdot 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -1 \end{aligned}$$

Berührpunkte: $B_1(2,2)$ und $B_2(4,-1)$

Um die Gleichung der Graden durch die Punkte B_1 und P zu bestimmen, kann man sich die Arbeit etwas erleichtern, indem man den zweiten Strahlensatz

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ (siehe Skizze unten)

verwendet und die so gewonnene Gleichung nach y auflöst oder wie hier einfach nur nennerfrei macht.



Tangente durch $P(6,1)$, $B_1(2,2)$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y-1}{x-6} = \dfrac{2-1}{2-6} = -\dfrac{1}{4}$

$t_1\colon x + 4y = 10$

Die Reihenfolge, in der man die Differenzen berechnet, spielt übrigens keine Rolle, sofern man im Zähler und Nenner jeweils die Koordinaten der entsprechenden Punkte subtrahiert.

Die Gleichung $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1-y}{6-x} = \dfrac{1-2}{6-2} = -\dfrac{1}{4}$ würde also auch zum richtigen Ergebnis führen.

Tangente durch $P(6,1)$, $B_2(4,-1)$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y-1}{x-6} = \dfrac{-1-1}{4-6} = 1$

$t_2\colon x - y = 5$