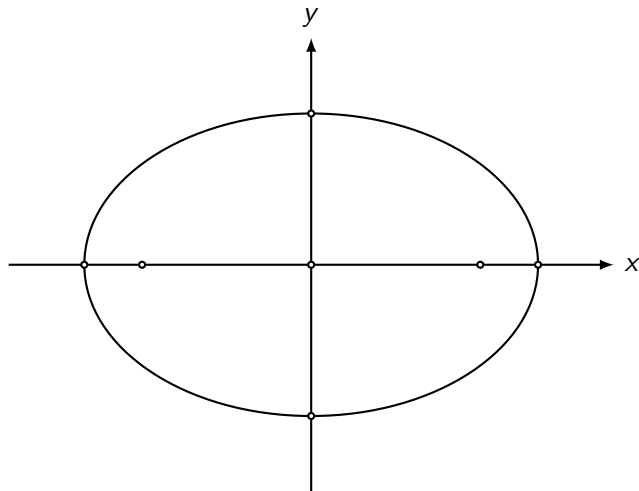


Kegelschnitte

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Gegeben ist eine Ellipse. Beschrifte möglichst viele Punkte, Strecken und Geraden in der Skizze mit Fachausdrücken.



Aufgabe 1

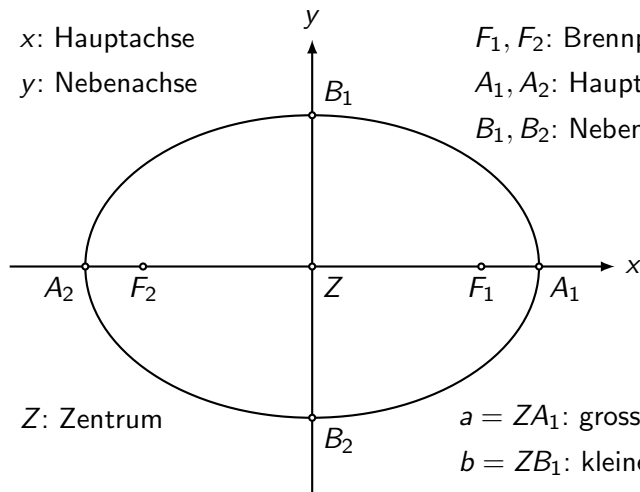
x : Hauptachse

y : Nebenachse

F_1, F_2 : Brennpunkte

A_1, A_2 : Hauptscheitel

B_1, B_2 : Nebenscheitel



Z : Zentrum

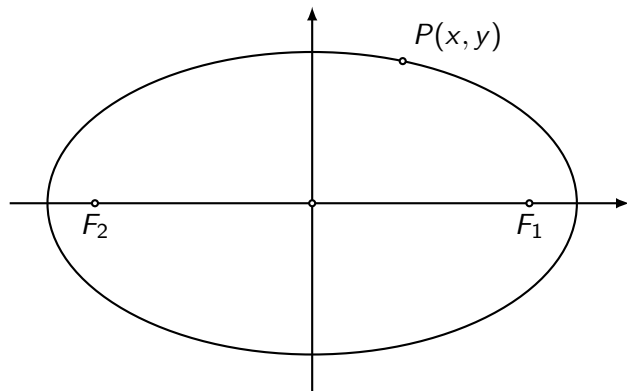
$a = ZA_1$: grosse Halbachse

$b = ZB_1$: kleine Halbachse

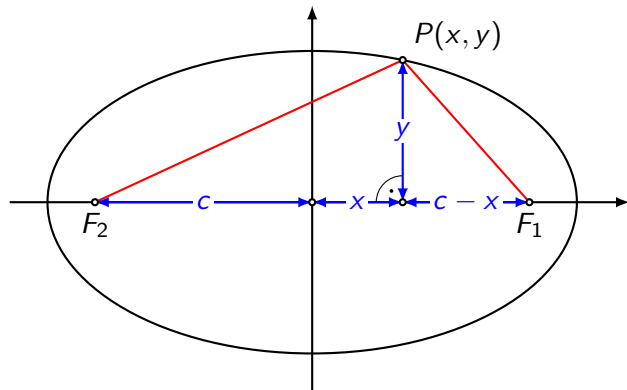
$c = ZF_1$: lineare Exzentrizität

Aufgabe 2

Zeige (ohne Vereinfachung), wie die Koordinatengleichung einer zentrierten und achsenparallelen Ellipse aus der Brennpunktdefinition hergeleitet wird.



Aufgabe 2



$$\overline{PF_2} + \overline{PF_1} = 2a \quad (\text{Formelsammlung})$$

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a \quad (2 \times \text{Satz des Pythagoras})$$

Wegen $c+x = x+c$ und $(c-x)^2 = (x-c)^2$ ist auch

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \text{ richtig.}$$

Aufgabe 3

Wie Lang sind die grosse und die kleine Halbachse der Ellipse mit folgender Gleichung?

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Aufgabe 3

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$$

grosse Halbachse: $a = \sqrt{7}$, kleine Halbachse: $b = 2$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $k: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$. Welche der folgenden Punkte liegen auf k ?

- (a) $P(1, 2)$
- (b) $P(2, 1)$
- (c) $P(0, 0)$
- (d) $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- (e) $P(3, -1)$
- (f) $P(0, \sqrt{3})$

Aufgabe 4

$$k: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(a) P(1,2): \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad P \notin k$$

Aufgabe 4

$$k: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(a) P(1,2): \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

$$(b) P(2,1): \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow P \in k$$

Aufgabe 4

$$k: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(a) P(1,2): \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

$$(b) P(2,1): \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow P \in k$$

$$(c) P(0,0): \frac{0}{6} + \frac{0}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

Aufgabe 4

$$k: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(a) P(1,2): \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

$$(b) P(2,1): \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow P \in k$$

$$(c) P(0,0): \frac{0}{6} + \frac{0}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

$$(d) P(\sqrt{2}, \sqrt{2}): \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow P \in k$$

Aufgabe 4

$$k: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(a) P(1,2): \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

$$(b) P(2,1): \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow P \in k$$

$$(c) P(0,0): \frac{0}{6} + \frac{0}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

$$(d) P(\sqrt{2}, \sqrt{2}): \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow P \in k$$

$$(e) P(3, -1): \frac{9}{6} + \frac{1}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

Aufgabe 4

$$k: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(a) P(1,2): \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

$$(b) P(2,1): \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow P \in k$$

$$(c) P(0,0): \frac{0}{6} + \frac{0}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

$$(d) P(\sqrt{2}, \sqrt{2}): \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow P \in k$$

$$(e) P(3, -1): \frac{9}{6} + \frac{1}{3} \neq 1 \Rightarrow P \notin k$$

$$(f) P(0, \sqrt{3}): \frac{0}{6} + \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow P \in k$$

Aufgabe 5

Gegeben ist eine Ellipse mit der Gleichung $k: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bestimme die fehlenden Koordinaten von P , so dass $P \in k$.

- (a) $P(x, 1)$
- (b) $P(3, y)$
- (c) $P(a, a)$

Aufgabe 5

$$(a) P(x, 1): \frac{x^2}{12} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{12} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \Rightarrow x = \pm 3$$

Aufgabe 5

$$(a) P(x, 1): \frac{x^2}{12} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{12} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \Rightarrow x = \pm 3$$

$$(b) P(3, y): \frac{9}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \pm 1$$

Aufgabe 5

$$(a) P(x, 1): \frac{x^2}{12} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{12} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \Rightarrow x = \pm 3$$

$$(b) P(3, y): \frac{9}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \pm 1$$

$$(c) P(a, a): \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} = 1$$

$$\frac{a^2}{12} + \frac{3a^2}{12} = \frac{4a^2}{12} = \frac{a^2}{3} = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

Aufgabe 6

Wie lautet die Gleichung der Ellipse mit den gegebenen Bestimmungsstücken?

(a) $a = 6$, $b = \sqrt{11}$

(b) $a = 5$, $c = 4$

(c) $F_1(3, 0)$, $b = \sqrt{7}$

(d) $P(6, 4)$ und $Q(8, 3)$ liegen auf der Ellipse

Aufgabe 6

$$(a) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

$$(b) c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$(c) c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 7 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$$

$$(d) P(6, 4) \in \text{Ellipse: } \frac{36}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$Q(8, 3) \in \text{Ellipse: } \frac{64}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad (2)$$

$$9 \cdot (1) - 16 \cdot (2): -\frac{700}{a^2} = -7 \quad || : (-7)$$

$$\frac{100}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 10$$

$$(2): \frac{36}{100} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{16}{b^2} = \frac{64}{100} \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$$

Aufgabe 7

Gegeben sind die Ellipsen $k_1: \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ und $k_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

- (a) Bestimme die lineare und die numerische Exzentrizität beider Ellipsen.
- (b) Welche der beiden Ellipsen gleicht mehr einem Kreis? Begründe die Antwort.

Aufgabe 7

Gegeben: $k_1: \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ und $k_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(a) $k_1: a_1 = \sqrt{7}, b_1 = \sqrt{3}$

lineare Exzentrizität: $c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{7 - 3} = 2$

numerische Exzentrizität: $\varepsilon_1 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

Aufgabe 7

Gegeben: $k_1: \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ und $k_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(a) $k_1: a_1 = \sqrt{7}, b_1 = \sqrt{3}$

lineare Exzentrizität: $c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{7 - 3} = 2$

numerische Exzentrizität: $\varepsilon_1 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

$k_2: a_2 = \sqrt{6}, b_2 = \sqrt{2}$

lineare Exzentrizität: $c_2 = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} = \sqrt{6 - 2} = 2$

numerische Exzentrizität: $\varepsilon_2 = \frac{c_2}{a_2} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6}$

Aufgabe 7

Gegeben: $k_1: \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ und $k_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(a) $k_1: a_1 = \sqrt{7}, b_1 = \sqrt{3}$

lineare Exzentrizität: $c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{7 - 3} = 2$


numerische Exzentrizität: $\varepsilon_1 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

$k_2: a_2 = \sqrt{6}, b_2 = \sqrt{2}$

lineare Exzentrizität: $c_2 = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} = \sqrt{6 - 2} = 2$

numerische Exzentrizität: $\varepsilon_2 = \frac{c_2}{a_2} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6}$

- (b) Für $c = 0$ gilt $0^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a = b \Rightarrow$ Ellipse ist Kreis
Somit hat für $c = 0$ auch die numerische Exzentrizität den Wert $\varepsilon = 0/a = 0$. Also gleicht eine Ellipse umso mehr einem Kreis, je näher ε bei 0 liegt.

Somit folgt aus $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow k_1$ hat mehr die Form eines 

Aufgabe 8

Berechne den Flächeninhalt folgender Ellipsen.

(a) $k_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1:$

(b) $k_1: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1:$

Aufgabe 8

$$(a) \quad k_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1:$$

$$a = 5, \quad b = 2 \quad \Rightarrow \quad A = ab\pi = 5 \cdot 2 \cdot \pi = 10\pi$$

Aufgabe 8

$$(a) \quad k_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1:$$

$$a = 5, b = 2 \quad \Rightarrow \quad A = ab\pi = 5 \cdot 2 \cdot \pi = 10\pi$$

$$(b) \quad k_1: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1:$$

$$a = \sqrt{8}, b = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad A = ab\pi = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi = 4\pi$$

Aufgabe 9

Gegeben: $k: \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$ und $g: y = \frac{2}{3}x + 14$

Untersuche die gegenseitige Lage von k und g und bestimme die Koordinaten allfälliger Schnittpunkte oder eines Berührungspunkts.

Aufgabe 9

Gegeben: $k: \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$ und $g: y = \frac{2}{3}x + 14$

$$k: 100x^2 + 225y^2 = 22\,500$$

$$g: 3y = 2x + 42 \Rightarrow 2x = 3y - 42$$

g geschickt in k einsetzen:

$$25 \cdot (2x)^2 + 225y^2 = 22\,500$$

$$25 \cdot (3y - 42)^2 + 225y^2 = 22\,500$$

$$(3y - 42)^2 + 9y^2 = 900$$

$$9y^2 - 252y + 1764 + 9y^2 = 900$$

$$18y^2 - 252y + 864 = 0$$

$$y_1 = 6 \Rightarrow x_1 = -12 \Rightarrow S_1(-12, 6)$$

$$y_2 = 8; \Rightarrow x_2 = -9 \Rightarrow S_2(-9, 8)$$

Aufgabe 10

Berechne die Gleichung der Tangente an die Ellipse

$$k: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$$

im Kurvenpunkt $P(4, y)$ mit $y > 0$

Aufgabe 10

$$k: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1; P(4, y)$$

$$x = 4: \frac{16}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = 1 \quad (y > 1)$$

$$\text{Tangentengleichung: } t: \frac{x_P \cdot x}{20} + \frac{y_P \cdot y}{5} = 1$$

$$\frac{4x}{20} + \frac{y}{5} = 1$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$$

$$x + y = 5 \quad \text{oder: } y = -x + 5$$

Aufgabe 11

Berechne vom Punkt $P(6, 1)$, der ausserhalb der Ellipse liegt, die Gleichungen der Tangenten an die Ellipse

$$k: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Aufgabe 11

$$k: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1; P(6, 1)$$

$$\text{Polare zum Pol } P \text{ der Ellipse: } \frac{6 \cdot x}{20} + \frac{1 \cdot y}{5} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{10} + \frac{y}{5} = 1$$

$$k: x^2 + 4y^2 = 20$$

$$g: 3x + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 - 3x \quad (*)$$

$$(2y)^2 = (10 - 3x)^2$$

$$4y^2 = 100 - 60x + 9x^2 \quad \text{in } k \text{ einsetzen}$$

$$x^2 + \underbrace{100 - 60x + 9x^2}_{4y^2} = 20$$

$$10x^2 - 60x + 80 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow 2y_1 = 10 - 3 \cdot 2 = 4 \Rightarrow y_1 = 2$$