Beweis

Gegeben sind Polynome

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$
$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$

mit $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen, dass daraus $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n$ folgt.

$$p(x) = q(x)$$
$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$$
$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Da ein Polynom genau dann für alle $x \in \mathbb{R}$ null ist, wenn alle Koeffizienten null sind, folgt daraus

$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n$, was zu beweisen war. $\square$

Aufgabe 1

$3x - 4x^2 + 2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p(x) = 0x^3 - 4x^2 + 3x + 2$
$q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$a = 0,\ b = -4,\ c = 3,\ d = 2$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x) \\ ax + (2a + b) &= 2x + 1 \\ a &= 2 \quad (1) \\ 2a + b &= 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt $a = 2$ und $b = -3$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x) \\ ax - a + bx + 4b &= 8x + 17 \\ (a + b)x + (-a + 4b) &= 8x + 17 \\ a + b &= 8 \quad (1) \\ -a + 4b &= 17 (2) \end{aligned}$$

(1) und (2) $\quad \Rightarrow \quad a = 3,\ b = 5$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x) \\ abx + a + b &= 6x + 5 \\ ab &= 6 \quad (1) \\ a + b &= 5(2) \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ $a = 5 - b$ in (1) einsetzen:

$$\begin{aligned} (5-b)b &= 6 \\ 5b - b^2 &= 6 \\ b^2 - 5b + 6 &= 0 \\ (b-2)(b-3) &= 0 \\ b_1 = 2 &\quad \Rightarrow \quad a_1 = 3 \\ b_2 = 3 &\quad \Rightarrow \quad a_2 = 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} \quad || \cdot (x+1)^2$$

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= A + B(x+1) \\ 3x - 2 &= A + Bx + B \\ 3x - 2 &= Bx + (A + B) \\ B &= 3 \\ A + B &= -2 \end{aligned}$$

$A = -5$, $B = 3$

Aufgabe 6

$$\frac{x+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \quad || \cdot (x+1)(x-2)$$

$$\begin{aligned} x + 4 &= A(x-2) + B(x+1) \\ x + 4 &= Ax + Bx - 2A + B \\ 1 &= A + B \\ 4 &= -2A + B \end{aligned}$$

Additionsmethode oder TR: $A = -1$, $B = -2$