

Koeffizientenvergleich

Übungen

Theorie

Zwei Polynome

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

und

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$$

sind genau dann gleich, wenn sie *in allen* Koeffizienten übereinstimmen:

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n = b_n$$

Dies gilt auch für Polynome in mehreren Variablen:

$$p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

$$q(x, y) = 4x^2 - 2xy + 3y^2 - 7y + 10$$

$$\Rightarrow a = 4, b = -2, c = 3, d = 0, e = -7, f = 10$$

Beweis

Gegeben sind Polynome

Beweis

Gegeben sind Polynome

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$$

Beweis

Gegeben sind Polynome

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$$

mit $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen, dass daraus $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, \dots , $a_n = b_n$ folgt.

Beweis

Gegeben sind Polynome

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$$

mit $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen, dass daraus $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, \dots , $a_n = b_n$ folgt.

$$p(x) = q(x)$$

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Beweis

Gegeben sind Polynome

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$$

mit $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen, dass daraus $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, \dots , $a_n = b_n$ folgt.

$$p(x) = q(x)$$

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Da ein Polynom genau dann für alle $x \in \mathbb{R}$ null ist, wenn alle Koeffizienten null sind, folgt daraus

Beweis

Gegeben sind Polynome

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$$

mit $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen, dass daraus $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, \dots , $a_n = b_n$ folgt.

$$p(x) = q(x)$$

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Da ein Polynom genau dann für alle $x \in \mathbb{R}$ null ist, wenn alle Koeffizienten null sind, folgt daraus

$a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, \dots , $a_n = b_n$, was zu beweisen war. □

Aufgabe 1

Bestimme die fehlenden Koeffizienten.

$$3x - 4x^2 + 2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Aufgabe 1

$$3x - 4x^2 + 2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Aufgabe 1

$$3x - 4x^2 + 2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$p(x) = 0x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

$$q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Aufgabe 1

$$3x - 4x^2 + 2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$p(x) = 0x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

$$q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$a = 0, b = -4, c = 3, d = 2$$

Aufgabe 2

Gegeben sind die Polynome $p(x) = ax + 2a + b$ und $q(x) = 2x + 1$.
Für welche Werte von a und b sind beide Polynome gleich?

Aufgabe 2

$$p(x) = q(x)$$

$$ax + (2a + b) = 2x + 1$$

$$a = 2 \quad (1)$$

$$2a + b = 1 \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $a = 2$ und $b = -3$

Aufgabe 3

Gegeben sind die Polynome $p(x) = ax - 6a + bx + 4b$ und $q(x) = 3x - 2$. Für welche Werte von a und b sind beide Polynome gleich?

Aufgabe 3

$$p(x) = q(x)$$

$$ax - a + bx + 4b = 8x + 17$$

$$(a + b)x + (-a + 4b) = 8x + 17$$

$$a + b = 8 \quad (1)$$

$$-a + 4b = 17 \quad (2)$$

$$(1) \text{ und } (2) \quad \Rightarrow \quad a = 3, b = 5$$

Aufgabe 4

Gegeben sind die Polynome $p(x) = abx + a + b$ und $q(x) = 6x + 5$.
Für welche Werte von a und b sind beide Polynome gleich?

Aufgabe 4

$$p(x) = q(x)$$

$$abx + a + b = 6x + 5$$

$$ab = 6 \quad (1)$$

$$a + b = 5 \quad (2)$$

Aufgabe 4

$$p(x) = q(x)$$

$$abx + a + b = 6x + 5$$

$$ab = 6 \quad (1)$$

$$a + b = 5 \quad (2)$$

(2) $\Rightarrow a = 5 - b$ in (1) einsetzen:

Aufgabe 4

$$p(x) = q(x)$$

$$abx + a + b = 6x + 5$$

$$ab = 6 \quad (1)$$

$$a + b = 5 \quad (2)$$

(2) $\Rightarrow a = 5 - b$ in (1) einsetzen:

$$(5 - b)b = 6$$

$$5b - b^2 = 6$$

$$b^2 - 5b + 6 = 0$$

$$(b - 2)(b - 3) = 0$$

$$b_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3$$

$$b_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2$$

Aufgabe 5

Welche Werte von A und B erfüllen die folgende Gleichung?

$$\frac{3x - 2}{(x + 1)^2} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{x + 1}$$

Aufgabe 5

$$\frac{3x - 2}{(x + 1)^2} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{x + 1} \quad || \cdot (x + 1)^2$$

$$3x - 2 = A + B(x + 1)$$

$$3x - 2 = A + Bx + B$$

$$3x - 2 = Bx + (A + B)$$

$$B = 3$$

$$A + B = -2$$

$$A = -5, B = 3$$

Aufgabe 6

Welche Werte von A und B erfüllen die folgende Gleichung?

$$\frac{x+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Aufgabe 6

$$\frac{x+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \quad || \cdot (x+1)(x-2)$$

$$x+4 = A(x-2) + B(x+1)$$

$$x+4 = Ax + Bx - 2A + B$$

$$1 = A + B$$

$$4 = -2A + B$$

Aufgabe 6

$$\frac{x+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \quad || \cdot (x+1)(x-2)$$

$$x+4 = A(x-2) + B(x+1)$$

$$x+4 = Ax + Bx - 2A + B$$

$$1 = A + B$$

$$4 = -2A + B$$

Additionsmethode oder TR: $A = -1$, $B = -2$