Aufgabe 1

(a) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

(b) $c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

(c) $F_1(8, 0) \quad \Rightarrow \quad e = 8$ und $a = 15$

$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 = 225 - 64 = 161$

$\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{161} = 1$

Aufgabe 2

(a) $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{a^2} - \dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$

Wegen $a \geq b > 0$ ist $0 < \dfrac{b^2}{a^2} \leq 1$ und damit $0 \leq \varepsilon < 1$.

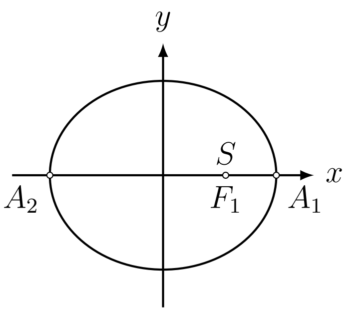
(b)
- $\varepsilon = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{b^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = b$

  Die Ellipse ist ein Kreis.

- $\varepsilon = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{b^2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

  Die Ellipse degeneriert zu einer Strecke.

(c) Skizze:



$\overline{A_1F_1} = 1.462 \cdot 10^8 \qquad \overline{A_2F_1} = 1.511 \cdot 10^8$

$$2a = \overline{A_1A_2}$$
$$2a = 1.511 \cdot 10^8 + 1.462 \cdot 10^8$$
$$2a = 2.973 \cdot 10^8$$
$$a = 1.4865 \cdot 10^8$$
$$c = a - \overline{A_1F_1} = 2.45 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0.0165$$

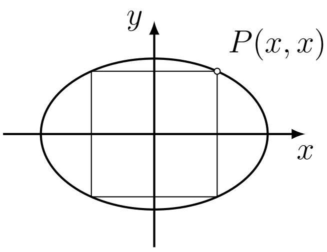
Aufgabe 3

Setze $a = 4$, $x = 2$ und $y = 1$ in die Koordinatengleichung der Ellipse ein:

$$\frac{2^2}{4^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{4}{16} + \frac{1}{b^2} = 1$$
$$\frac{1}{b^2} = \frac{3}{4}$$
$$b^2 = \frac{4}{3}$$
$$b = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Aufgabe 4

Für ein Quadrat muss der Eckpunkt P gleiche Koordinaten haben.



$$\frac{x^2}{36} + \frac{x^2}{16} = 1$$
$$4x^2 + 9x^2 = 144$$
$$13x^2 = 144$$
$$x = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$
$$s = 2x = \frac{24\sqrt{13}}{13} \approx 6.656$$

Aufgabe 5

Setze die Gleichung der Geraden ($y = 2x - 1$) in die Gleichung der Ellipse ($9x^2 + 25y^2 = 225$) ein:

$$
\begin{aligned}
9x^2 + 25(2x-1)^2 &= 225 \\
9x^2 + 25(4x^2 - 4x + 1) &= 225 \\
109x^2 - 100x - 200 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -0.971 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2.943 \\
x_2 &= 1.889 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 2.778
\end{aligned}
$$

$P_1(-0.971, -2.943),\ P_2(1.889, 2.778)$

Aufgabe 6

Setze $y_0 = \frac{1}{2}$ in die Koordinatengleichung der Ellipse ein:

$$x_0^2 + 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = \frac{75}{4} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

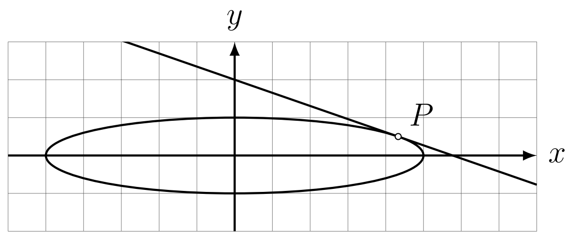
$$x^2 + 25y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 5,\ b = 1$$

Setze $a = 5,\ b = 1,\ x_0 = \frac{5}{2}\sqrt{3},\ y_0 = \frac{1}{2}$ in die Tangentengleichung der Ellipse ein:

$$\frac{x_0 x}{25} + \frac{y_0 y}{1} = 1$$

$$\frac{5\sqrt{3}\,x}{2 \cdot 25} + \frac{y}{2} = 1 \quad || \cdot 10$$

$t\colon\ 2\sqrt{3}x + 5y = 20$



Aufgabe 7

Entweder die Koordinatengleichung auf Normalform bringen:

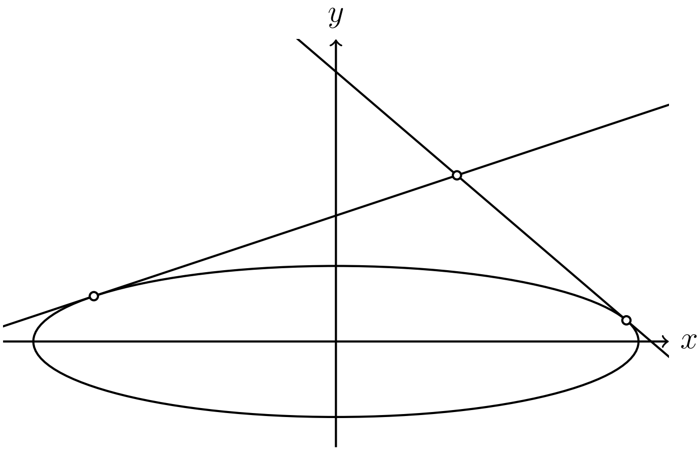
$$25x^2 + 400y^2 = 10^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 20,\ b = 5$$

oder die Polarengleichung aus der gegebenen Gleichung herleiten:

$$25x_0x + 400y_0y = 10^4 \quad \Rightarrow \quad t\colon x_0x + 16y_0y = 400$$

In diese Gleichung setzen wir den Punkt $P(8, 11)$ ein:

$$8x + 176y = 400 \quad \Rightarrow \quad x + 22y = 50 \quad \Rightarrow \quad p\colon x = 50 - 22y$$



Schneide die Polare mit der Ellipse:

$$\begin{aligned}
25(50-22y)^2 + 400y^2 &= 10^4 \\
(50-22y)^2 + 16y^2 &= 400 \\
2500 - 2200y + 484y^2 + 16y^2 &= 400 \\
500y^2 - 2200y + 2100 &= 0 \\
5y^2 - 22y + 21 &= 0 \\
y_1 = 3 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -16 \\
y_2 = 1.4 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 19.2
\end{aligned}$$

$B_1(3, -16)$ und $B_2(1.4, 19.2)$ in t einsetzen:

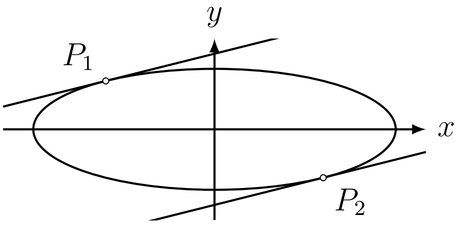
$$t_1\colon \frac{3}{400}x - \frac{16}{25}y = 1$$

$$t_2\colon \frac{1.4}{400}x - \frac{19.2}{25}y = 1 \quad \Rightarrow \quad t_2\colon \frac{7}{2000}x - \frac{48}{625}y = 1$$

Aufgabe 8

Ellipsengleichung auf Normalform bringen:

$$4x^2 + 36y^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 6,\ b = 2$$



Steigung der Tangente an eine Ellipse in einem Kurvenpunkt $P(x, y)$:

$$m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = -\frac{4}{36} \cdot \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{9}x$$

Setze $y = -\frac{4}{9}x$ in die Ellipsengleichung ein:

$$4x^2 + 36\left(-\frac{4}{9}x\right)^2 = 144$$

$$\begin{aligned}
4x^2 + 36 \cdot \frac{16}{81}x^2 &= 144 \quad || : 4 \\
x^2 + \frac{16}{9}x^2 &= 36 \quad || \cdot 9 \\
9x^2 + 16x^2 &= 324 \\
25x^2 &= 324 \\
5x &= \pm 18 \\
x_1 &= \tfrac{18}{5} \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\tfrac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad P_1(\tfrac{18}{5}, -\tfrac{8}{5}) \\
x_2 &= -\tfrac{18}{5} \quad \Rightarrow \quad y_2 = \tfrac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad P_1(-\tfrac{18}{5}, \tfrac{8}{5})
\end{aligned}$$

Da wir jetzt die Berührpunkte (Tangentenpunkte) kennen, können wir die Tangentengleichung der Ellipse verwenden:

$$\frac{18}{5 \cdot 36}x - \frac{8}{5 \cdot 4}y = 1 \quad \Rightarrow \quad t_1\colon \frac{1}{10}x - \frac{2}{5}y = 1$$

$$-\frac{18}{5 \cdot 36}x + \frac{8}{5 \cdot 4}y = 1 \quad \Rightarrow \quad t_2\colon -\frac{1}{10}x + \frac{2}{5}y = 1$$

Oder in der Steigungs-Ordinatenabschnitts-Form:

$$t_1\colon y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}$$

$$t_2\colon y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$$

Aufgabe 9

$P(3, y)$ liegt sowohl auf der Gerade als auch auf der Ellipse. Daher setzen wir $x = 3$ in die Geradengleichung (=Tangentengleichung) $y = 0.6x - 5$ ein:

$$y = 0.6 \cdot 3 - 5 = -3.2 \quad \Rightarrow \quad P(3, -3.2)$$

Um eine erste Gleichung für die Halbachsen a und b zu erhalten, setzen wir die Koordinaten des Punktes $P(3, -3.2)$ in die Ellipsengleichung ein:

$$\frac{9}{a^2} + \frac{10.24}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Die zweite Gleichung für a und b bekommen wir, indem wir die Tangentensteigung $m = 0.6$ zusammen mit den Koordinaten von P in die Gleichung für die Tangentensteigung der Ellipse einsetzen:

$$0.6 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{3}{(-3.2)} \quad \Rightarrow \quad b^2 = 0.64a^2 \quad (2)$$

Setzen wir (2) in (1) ein, ergibt dies

$$\begin{aligned} \frac{9}{a^2} + \frac{10.24}{b^2} &= 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{10.24}{0.64a^2} &= 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{16}{a^2} &= 1 \\ \frac{25}{a^2} &= 1 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

$a = 5$ in (2) einsetzen: $b^2 = 0.64 \cdot 25 = 16 \quad \Rightarrow \quad b = 4.$

Aufgabe 10

(a) $y^2 = 2px \quad \Rightarrow \quad 16 = 8p \quad \Rightarrow \quad p = 2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4x$

(b) $p/2 = 6 \quad \Rightarrow \quad p = 12 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 24x$

(c) $p/2 = 2.5 \quad \Rightarrow \quad p = 5 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 10x$

Aufgabe 11

Ersetze x durch $x - u$: $y^2 = 2p(x - u)$

Aufgabe 12

Gleichung der um u verschobenen Parabel: $y^2 = 2p(x - u)$

(a) $P(0,4)$ in $y^2 = 2p(x+4)$ einsetzen:

$$16 = 2p(0+4)$$
$$p = 2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 4(x+4)$$

(b) $P(6,3)$ in $y^2 = 2p(x-3)$ einsetzen:

$$9 = 2p(6-3)$$
$$p = \tfrac{9}{6} = 1.5$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 3(x-3)$$

Aufgabe 13

Ellipse: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
Parabel: $y^2 = 4x$

$$\begin{aligned} 16x^2 + 36y^2 &= 576 \\ 16x^2 + 36 \cdot 4x &= 576 \\ x^2 + 9x - 36 &= 0 \\ (x-3)(x+12) &= 0 \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= -12 \quad \text{(unbrauchbar)} \end{aligned}$$

$$y^2 = 4 \cdot 3 = 12 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{3}$$

$S_1(3, 2\sqrt{3})$, $S_2(3, -2\sqrt{3})$

Aufgabe 14

Parabel: $y^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad p = 1$

$x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0^2 = 2 \cdot x_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 2 > 0$

$x_0 = 2$, $y_0 = 2$ und $p = 1$ in die Tangentengleichung einsetzen:

$2y = 1(x+2) = x+2 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = \frac{1}{2}x + 1$

Aufgabe 15

(a) Parabel: $y^2 = 2x \quad (p = 1)$

$P(-8,3) \notin$ Parabel Tangentegleichung $\Rightarrow$ Polare

$$y_0 y = p(x + x_0) \quad \Rightarrow \quad 3y = x - 8 \quad \Rightarrow \quad g\colon y = \frac{x-8}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{Parabel} \cap \text{Polare:} \qquad \frac{(x-8)^2}{9} &= 2x \\
(x-8)^2 &= 18x \\
x^2 - 16x + 64 &= 18x \\
x^2 - 34x + 64 &= 0
\end{aligned}$$

$$x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2$$
$$x_2 = 32 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 8$$

Tangentengleichungen $y_0 y = p(x + x_0)$:

$-2y = x + 2 \quad \Rightarrow \quad t_1\colon y = -\frac{1}{2}x - 1$

$8y = x + 32 \quad \Rightarrow \quad t_2\colon y = \frac{1}{8}x + 4$

(b) Tangentengleichung:

$$y_0 y = p(x + x_0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{p}{y_0}x + \frac{px_0}{y_0} = mx + q$$

Koeffizientenvergleich: $m = \dfrac{p}{y_0} = \dfrac{1}{y_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 1$

Parabelgleichung: $y_0^2 = 2px_0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(\frac{1}{2}, 1)$

Aufgabe 16

Gleichung der Tangente im Punkt $P(x_0, y_0)$:

$$y_0 y = p(x + x_0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{p}{y_0}x + \frac{px_0}{y_0}$$

Koeffizientenvergleich mit der Geraden $y = x + 2$:

$$\frac{p}{y_0} \overset{(1)}{=} 1 \quad \text{und} \quad \frac{p \cdot x_0}{y_0} \overset{(2)}{=} 2$$

(1) in (2) einsetzen: $1 \cdot x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2$

$x_0 = 2$ in $y = x + 2$ einsetzen: $y_0 = 2 + 2 = 4$

Aus (1) folgt jetzt $p = 4$

Gleichung der gesuchten Parabel: $y^2 = 8x$

Alternative Lösung (Berührbedingung verwenden)

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 &= 2px \\
x^2 + 4x + 4 &= 2px \\
x^2 + (4 - 2p)x + 4 &= 0
\end{aligned}$$

Die Graphen $y^2 = 2px$ und $y = x + 2$ haben genau einen Berührpunkt; also gilt $D = 0$.

$$\begin{aligned}
(4-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 &= 0 \\
16 - 16p + 4p^2 - 16 &= 0 \\
4p^2 - 16p &= 0 \\
p(p-4) &= 0 \\
p &= 0 \quad \text{nicht sinnvoll} \\
p &= 4
\end{aligned}$$

$\Rightarrow y^{=}8x$

Aufgabe 17

Koordinatengleichung der Hyperbel: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Asymptotengleichung der Hyperbel: $y = \pm \dfrac{b}{a} x$

(a) $a = 3$, $b = 2$

Hyperbel: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$;

Asymptote: $y = \pm \dfrac{2}{3} x$

(b) $b = 3$, $c = 4 \quad \Rightarrow \quad a^2 = c^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$

Hyperbel: $\dfrac{x^2}{7} - \dfrac{y^2}{9} = 1$;

Asymptote: $y = \pm \dfrac{3}{\sqrt{7}} x = \pm \dfrac{3\sqrt{7}}{7} x$

Der Steigungsquotient der Asymptote wurde mit $\sqrt{7}$ erweitert, damit der Nenner *wurzelfrei* wird.

(c) $P(4,0)$ und $Q(5,3)$ liegen auf der Hyperbel

Setze $x = 4$ und $y = 0$ in die Hyperbelgleichung ein:

$$\frac{16}{a^2} - \frac{0}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Setze $x = 5$, $y = 3$ und $a = 4$ in die Hyperbelgleichung ein:

$$\frac{25}{16} - \frac{9}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{b^2} = \frac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Hyperbel: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Asymptote: $y = \pm \dfrac{4}{4} x = \pm x$

(d) Brennpunkt $F_1(8,0)$, grosse Halbachse $a=6$

$$F_1(c,0)=F_1(8,0) \quad \Rightarrow \quad c=8$$

$$b^2=c^2-a^2=64-36=28$$

Hyperbel: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{28}=1$

Asymptote: $y=\pm\dfrac{\sqrt{28}}{6}x=\pm\dfrac{2\sqrt{7}}{6}x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$

Aufgabe 18

$$H_1\colon \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{64}=1 \quad \Rightarrow \quad x^2-\frac{y^2}{16}\overset{(1)}{=}4$$

$$H_2\colon x^2-\frac{y^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \quad x^2\overset{(2)}{=}1+\frac{y^2}{4}$$

Setze (2) in (1) ein: $1+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=4$

$$\frac{3y^2}{16}=3$$

$$\frac{y^2}{16}=1 \quad \Rightarrow \quad y=\pm 4$$

Setze $y^2=16$ in (2) ein: $x^2=1+\dfrac{16}{4}=5 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{5}$

$$H_1\cap H_2=\big\{(\sqrt{5},4),(\sqrt{5},-4),(-\sqrt{5},4),(-\sqrt{5},4)\big\}$$

Aufgabe 19

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}>\sqrt{1+0}=1$$

Die Abschätzung mit $>$ ist möglich, da $a^2/b^2>0$ ist.

Aufgabe 20

$$25x^2-9y^2\overset{(*)}{=}225 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1 \;\Rightarrow\; a=3,\, b=5$$

Die Steigung der Tangente im Hyperbelpunkt $P(x_P,y_P)$ kann durch Umformung der Tangentengleichung bestimmt werden.

$$\frac{x_Px}{9}-\frac{y_Py}{25}=1 \;\Rightarrow\; \frac{y_Py}{25}=\frac{x_Px}{9}-1 \;\Rightarrow\; y=\frac{25x_P}{9y_P}x-\frac{25}{y_P}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich mit $y = mx + q$ ergibt sich:

$$m = \frac{25x_P}{9y_P} = 1 \;\Rightarrow\; x_P = \frac{9}{25}y_p$$

Da $P(x_P, y_P) \in$ Hyperbel, müssen x_P und y_P $(*)$ erfüllen:

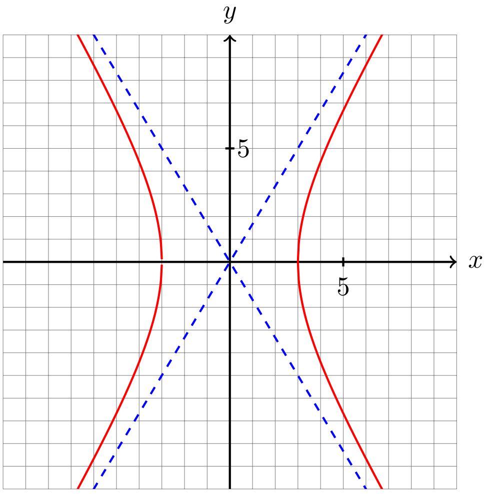
$$25 \cdot \frac{9^2}{25^2} \cdot y_p^2 - 9y_P^2 = 225 \;\Rightarrow\; -\frac{144}{25}y_P^2 = 225 \;\Rightarrow\; \text{keine Lösung}$$

Es gibt keine Hyperbelpunkte mit der Tangentensteigung $m = 1$.

Man hätte dies nach der Bestimmung von $a = 3$ und $b = 5$ durch eine Testrechnung vorwegnehmen können:

Asymptote: $y = \pm\frac{5}{3}$

Da die Steigung einer Tangente an die Hyperbel nicht kleiner als die Steigung der Asymptote sein kann (siehe Abbildung), ist das Weiterrechnen unnötig.



Aufgabe 21

Durch einen Koeffizientenvergleich zwischen den beiden Formen der Tangentengleichung

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{3}x - y = \frac{7}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{7}x - \frac{3}{7}y = 1$$

und

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{3y}{b^2} = 1$$

lassen sich die Werte von a und b bestimmen:

$$\frac{4}{a^2} = \frac{4}{7} \quad\Rightarrow\quad a^2 = 7$$

$$\frac{3}{b^2} = \frac{3}{7} \quad\Rightarrow\quad b^2 = 7$$

$$\Rightarrow H\colon \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{7} = 1$$

Aufgabe 22

Einsetzen von $y = 2x + q$ in die Hyperbelgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{9} - \frac{(2x+q)^2}{4} &= 1 \\
4x^2 - 9(2x+q)^2 &= 36 \\
4x^2 - 9(4x^2 + 4qx + q^2) &= 36 \\
-32x^2 - 36qx - 9q^2 - 36 &= 0 \\
32x^2 + 36qx + 9q^2 + 36 &= 0 \\
\alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0
\end{aligned}$$

... hat mindestens Lösung, wenn $D = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
(36q)^2 - 4 \cdot 32 \cdot (9q^2 + 36) &\geq 0 \\
1296q^2 - 1152q^2 + 4608 &\geq 0 \\
144q^2 - 4608 &\geq 0 \\
q^2 &\geq 32 \\
|q| &\geq \pm 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(a) für $|q| > 4\sqrt{2}$

(b) für $|q| = 4\sqrt{2}$