

Wenn nichts anderes vermerkt, liegen die Achsen der Kegelschnitte auf den Achsen des Koordinatensystems.

Aufgabe 1

Gib die Gleichungen der folgenden Ellipsen an:

- (a) Halbachsen: $a = 6$, $b = 4$
- (b) Halbachsen: $a = 4$, $c = 3$
- (c) Brennpunkt: $F_1(8, 0)$, die grosse Halbachse hat die Länge 15

Aufgabe 2

Die Zahl $\varepsilon = \frac{c}{a}$ nennt man die numerische Exzentrizität der Ellipse mit den Halbachsenlängen a und b (wobei $a \geq b$).

- (a) Zeige, dass für jede Ellipse $0 \leq \varepsilon < 1$ gilt.
- (b) Welche Figur erhält man für $\varepsilon = 0$, welche für $\varepsilon = 1$?
- (c) Berechne für die Erdbahn um die Sonne (die bekanntlich ellipsenförmig ist), die lineare und die numerische Exzentrizität.
 - kleinster Abstand Sonne – Erde: $1.462 \cdot 10^8$ km
 - grösster Abstand Sonne – Erde: $1.511 \cdot 10^8$ km

Zur Erinnerung: Die Sonne befindet sich in einem der Brennpunkte der Ellipse.

Aufgabe 3

Bestimme die Länge der Halbachse b , wenn $a = 4$ ist und der Punkt $P(2, 1)$ auf der Ellipse liegt.

Aufgabe 4

Einer Ellipse mit den Halbachsen $a = 6$ und $b = 4$ wird ein Quadrat einbeschrieben, dessen Seiten parallel zu den Ellipsenachsen sind. Welche Seitenlänge hat dieses Quadrat?

Aufgabe 5

Die Gerade $y = 2x - 1$ schneidet die Ellipse mit der Gleichung $9x^2 + 25y^2 = 225$ in zwei Punkten. Bestimme die Koordinaten dieser Punkte.

Aufgabe 6

Bestimme die Gleichung der Tangente an die Ellipse $x^2 + 25y^2 = 25$ durch den Ellipsenpunkt $P(x_0, \frac{1}{2})$ mit $x_0 > 0$.

Aufgabe 7

Bestimme die Gleichung der Tangenten an die Ellipse $25x^2 + 400y^2 = 10\,000$, die durch den Punkt $P(8, 11)$ gehen.

Aufgabe 8

In welchen Punkten haben die Tangenten an die Ellipse $4x^2 + 36y^2 = 144$ die Steigung $m = \frac{1}{4}$? Wie lauten die Gleichungen dieser Tangenten?

Aufgabe 9

Die Gerade $y = 0.6x - 5$ berührt die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

im Punkt $P(3, ?)$. Bestimme die Längen der Halbachsen.

Aufgabe 10

Welche Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$

- (a) geht durch den Punkt $P(4, 4)$?
- (b) hat den Brennpunkt $(6, 0)$?
- (c) hat eine Leitgerade mit der Gleichung $x = -2.5$?

Aufgabe 11

Die Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ wird um u Einheiten in der Richtung der x -Achse verschoben. Welches ist die Gleichung der verschobenen Parabel?

Aufgabe 12

Welche Gleichung hat die Parabel mit dem Scheitelpunkt S , welche symmetrisch zur x -Achse ist und durch den Punkt P geht?

- (a) $S(-4, 0), P(0, 4)$,
- (b) $S(3, 0), P(6, 3)$

Aufgabe 13

In welchen Punkten schneiden sich die Ellipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ und die Parabel $y^2 = 4x$?

Aufgabe 14

Bestimme die Gleichung der Tangente an die Parabel $y^2 = 2x$ durch den Parabelpunkt $P(2, y_0)$, wobei $y_0 > 0$ ist.

Aufgabe 15

Gegeben sei die Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2x$.

- (a) Bestimme die Gleichung der Tangenten, die durch den Punkt $P(-8, 3)$ gehen.
- (b) In welchem Punkt der Parabel hat die Tangente die Steigung $m = 1$?

Aufgabe 16

Welche Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ berührt die Gerade $g: y = x + 2$?

Aufgabe 17

Bestimme die Gleichungen der Hyperbeln und ihrer Asymptoten:

- (a) $a = 3, b = 2$
- (b) $b = 3, c = 4$
- (c) $P(4, 0)$ und $Q(5, 3)$ liegen auf der Hyperbel.
- (d) Brennpunkt $F_1(8, 0)$, grosse Halbachse $a = 6$

Aufgabe 18

In welchen Punkten schneiden sich die Hyperbeln mit den Gleichungen

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{64} = 1 \quad \text{und} \quad x^2 - \frac{y^2}{4} = 1?$$

Aufgabe 19

Die Zahl $\varepsilon = c/a$ mit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ nennt man die *numerische Exzentrizität* der Hyperbel mit den Halbachsenlängen a und b . Zeige, dass für jede Hyperbel gilt: $\varepsilon > 1$.

Aufgabe 20

In welchen Punkten hat die Tangente an die Hyperbel $25x^2 - 9y^2 = 225$ die Steigung $m = 1$?

Aufgabe 21

Die Gerade $t: y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$ berührt eine Hyperbel im Punkt $B(4, 3)$. Bestimme die Gleichung der Hyperbel.

Aufgabe 22

Gegeben sei die Hyperbel mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

- (a) Für welche Werte $q \in \mathbb{R}$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 2x + q$ die Hyperbel?
- (b) Wann liegt eine Tangente vor?