Kegelschnitte

Theorie

Inhaltsverzeichnis

1 Die geometrischen Definitionen der Kegelschnitte **3**

2 Kegelschnitte im Koordinatensystem **6**

2.1 Die Koordinatengleichung der Ellipse 6

2.2 Die Flächenformel der Ellipse 8

2.3 Tangenten an Ellipsen 8

2.4 Die Polare 11

2.5 Die Parabelgleichung 13

2.6 Tangenten an eine Parabel 13

2.7 Die Hyperbelgleichung 16

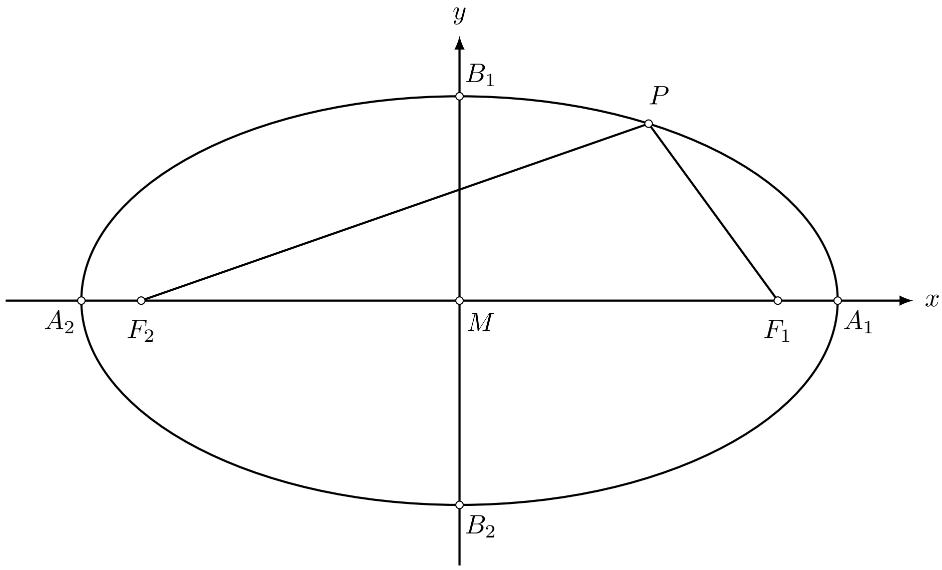
2.8 Tangenten an Hyperbeln 17

Version vom 8. September 2024

1 Die geometrischen Definitionen der Kegelschnitte

Definition 1

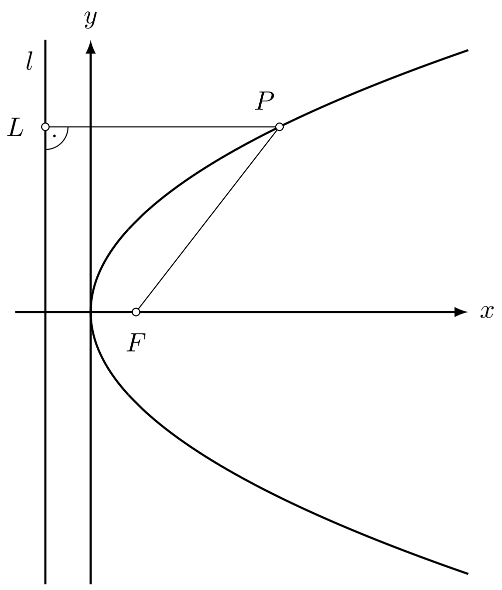
Den geometrischen Ort aller Punkte P einer Ebene, für welche die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dieser Ebene konstant ist, nennt man eine *Ellipse*.



- Die Punkte F_1 und F_2 heissen die *Brennpunkte* der Ellipse.
- Die Gerade durch F_1 und F_2 ist die *Hauptachse*, die Mittelsenkrechte der Strecke F_1F_2 ist die *Nebenachse* der Ellipse.
- Der Schnittpunkt M der beiden Achsen ist das *Zentrum* der Ellipse.
- Die *Scheitel* (oder *Scheitelpunkte*) A_1 und A_2 auf der Hauptachse sind die *Hauptscheitel*, die Scheitel B_1 und B_2 die *Nebenscheitel*.
- Die Strecke $a = MA_1$ ist die *grosse Halbachse*, die Strecke $b = MB_1$ ist die *kleine Halbachse* der Ellipse.

Definition 2

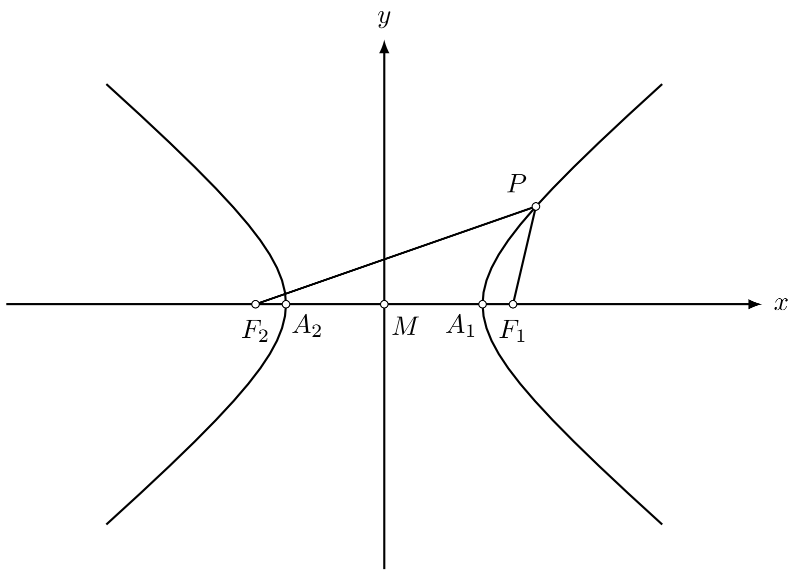
Den geometrischen Ort aller Punkte P einer Ebene, die von einem festen Punkt F und einer festen Geraden l gleich weit entfernt sind, nennt man eine *Parabel*.



- Der Punkt F heisst *Brennpunkt* der Parabel.
- Die Gerade l ist die *Leitgerade* der Parabel.
- Die Gerade senkrecht auf l durch F ist die *Achse* a der Parabel.
- Der Parabelpunkt S auf der Achse (der in der Mitte von F und l liegt) ist der *Scheitel* der Parabel.

Definition 3

Der geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für welche die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 (den Brennpunkten) dieser Ebene konstant ist, nennt man eine *Hyperbel*.

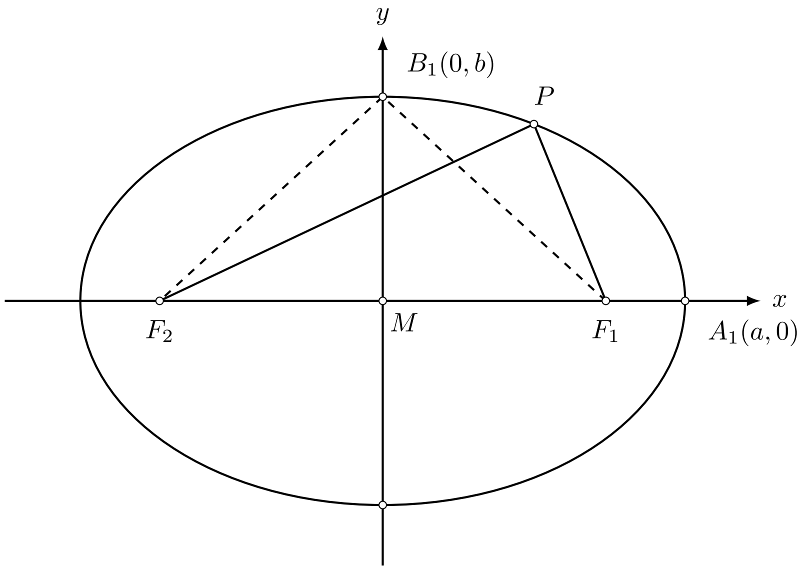


- Die Gerade durch F_1 und F_2 ist die *Hauptachse*, die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{F_1F_2}$ ist die *Nebenachse* der Hyperbel.
- Der Schnittpunkt der Achsen (die auch Symmetrieachsen sind) ist das *Zentrum* M der Hyperbel.
- Die Schnittpunkte A_1 und A_2 der Hauptachse mit der Hyperbel sind die *Scheitel* (*Scheitelpunkte*) der Hyperbel.

2 Kegelschnitte im Koordinatensystem

2.1 Die Koordinatengleichung der Ellipse

Gegeben sei eine zu den Koordinatenachsen symmetrische Ellipse mit den Halbachsenabschnitten a und b, wobei die Brennpunkte mit den Koordinaten $F_1(c, 0)$ und $F_2(-c, 0)$ auf der x-Achse liegen sollen.



Den Abstand $c = |MF_1| = |MF_2|$ nennt man die *lineare Exzentrizität* der Ellipse. Für diese lineare Exzentrizität gilt:

Die Mittelpunktsgleichung

Der Punkt $P(x, y)$ sei ein Punkt auf der Ellipse. Dann gilt:

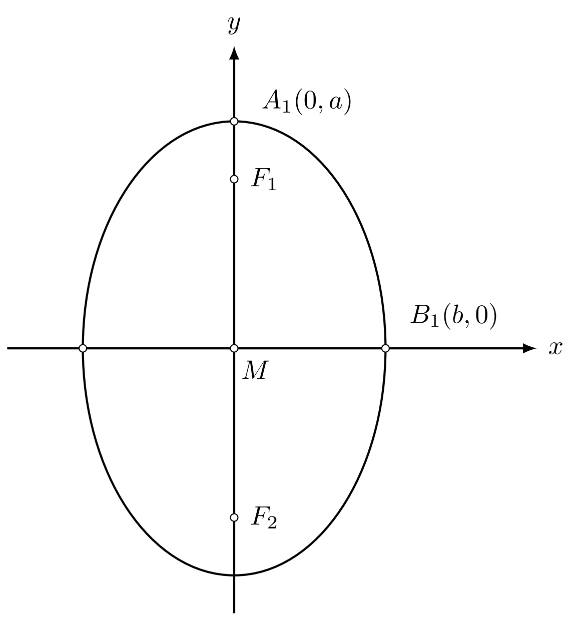
Satz

Die Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt $M(0,0)$ und den Halbachsen a und b lautet:

Dabei fallen die Ellipsenachsen mit den Koordinatenachsen zusammen.

Bemerkung

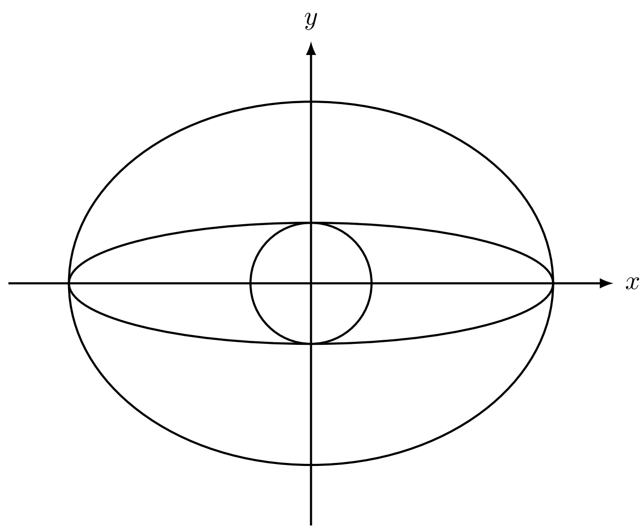
Für eine Ellipse, deren Brennpunkte auf der y-Achse liegen, müssen wir die Ellipsengleichung umformen:



2.2 Die Flächenformel der Ellipse

Für einen Kreis mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und Radius $r = 1$ gilt:

Um die Ellipse mit den Halbachsen a und b zu erhalten, strecken wir den Kreis um den Faktor a an der y-Achse und um den Faktor b an der x-Achse.



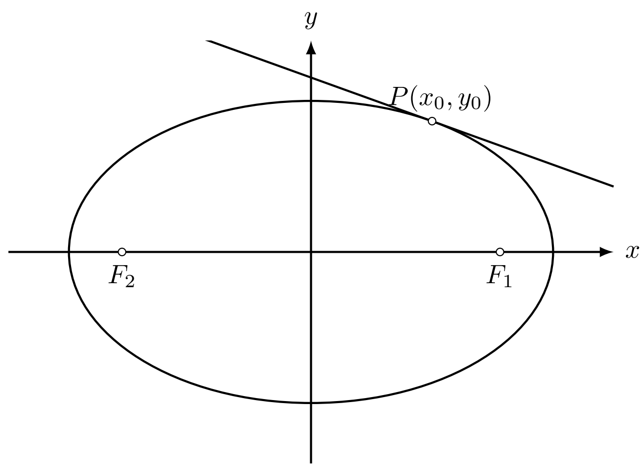
Das bedeutet, dass der Einheitskreis durch entsprechende Streckungen an den Koordinatenachsen in eine Ellipse transformiert werden kann.

Übertragen wir diese Streckungen auf die Formel für die Kreisfläche, so ist folgendes Resultat plausibel:

2.3 Tangenten an Ellipsen

Algebraische Herleitung

Die Gleichung einer Geraden soll so gewählt werden, dass sie mit einer gegebenen Ellipse genau einen Punkt $P(x_0, y_0)$ – den *Berührpunkt* – gemeinsam hat.



Ellipse:

Gerade=Tangente:

Setze t in e ein:

$$b^2x^2 + a^2(mx+q)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mxq + a^2q^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\underbrace{(a^2m^2+b^2)}_{\alpha}x^2 + \underbrace{2a^2mq}_{\beta}x + \underbrace{a^2q^2 - a^2b^2}_{\gamma} = 0$$

Damit die quadratische Gleichung *genau eine* Lösung hat muss

gelten.

Damit Ellipse und Gerade genau einen gemeinsamen Punkt $P(x_0, y_0)$ haben, müssen ihre Parameter a, b m, q die obige *Berührbedingung* erfüllen.

Die Gleichung $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

Ist ein Ellipsenpunkt $P(x_0, y_0)$ bekannt, können wir damit Steigung m und Ordinatenabschnitt q der Tangente bestimmen:

In die Geradengleichung eingesetzt ergibt dies schliesslich:

Das ist die *Tangentengleichung im Ellipsenpunkt* (x_0, y_0).

Herleitung mit Hilfe der Differenzialrechnung

Damit wir uns nicht unnötig mit Brüchen herumschlagen müssen, multiplizieren wir die Ellipsengleichung mit a^2b^2:

Nun bilden wir die Ableitung der impliziten Funktion $y = y(x)$

Ist $P(x_P, y_P)$ ein Punkt auf der Ellipse, so ist

Anstelle der Geradengleichungsform $y = mx + q$, setzen wir die Steigung in die Punkt-Steigungsform der Geradengleichung (rechts) ein

Also:

Beispiel 2.1

Bestimme die Berührpunkte und die Gleichung der Tangenten an die Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

welche die Steigung $m = -\frac{1}{2}$ haben.

Offenbar sind $a = 3$ und $b = 2$

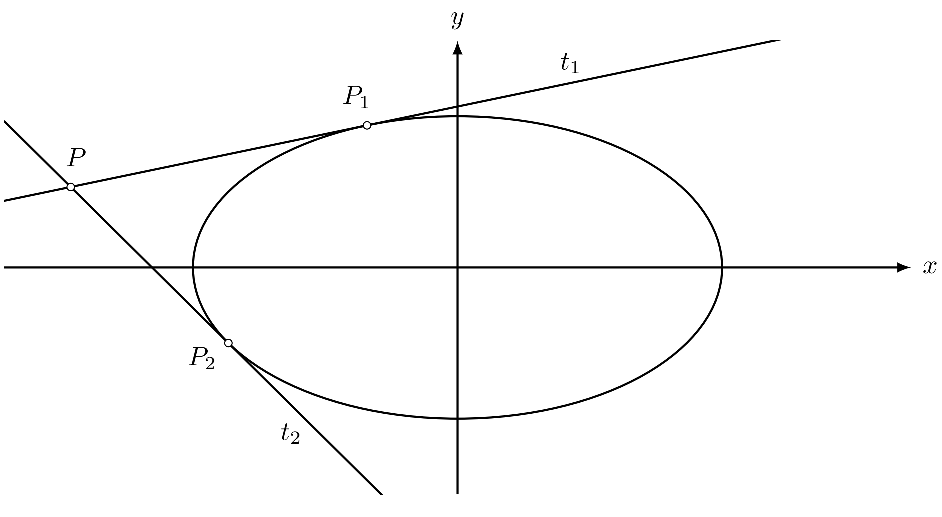
$$m = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0} \quad \Rightarrow$$

Setze die Koordinaten in die Ellipsengleichung ein:

2.4 Die Polare

Gegeben: Koordinatengleichung einer Ellipse und ein Punkt P_0 ausserhalb der Ellipse.

Gesucht: Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 von P an die Ellipse und die dazu gehörenden Berührpunkte P_1 und P_2.



Wir werden gleich sehen, dass wir auch bei dieser Aufgabe die oben hergeleitete Formel für die Tangente an eine Ellipse verwenden können.

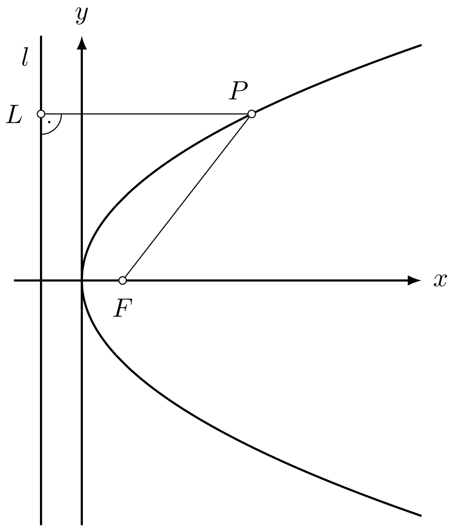
offenbar erfüllt $P_0(x_0, y_0)$ beide Gleichungen:

Nun ersetzen wir in diesen Gleichungen die Koordinaten x_1 und x_2 durch die unbestimmte Variable x sowie y_1 und y_2 durch die unbestimmte Variable y:

Was erhalten wir?

2.5 Die Parabelgleichung

Eine Parabel wird so in das Koordinatensystem gelegt, dass ihr Scheitelpunkt im Ursprung liegt und die Abszisse ihre Symmetrieachse ist



Ist p der Abstand des Brennpunkts F zur Leitgeraden l, so hat F die Koordinaten $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ und l die Gleichung $x=-\frac{p}{2}$.

Dann gilt für einen Punkt $P(x,y)$ auf der Parabel:

Satz

Die Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0,0)$ und dem Brennpunkt $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ hat die Gleichung

2.6 Tangenten an eine Parabel

Algebraische Herleitung

Die letzte Gleichung hat genau eine Lösung, wenn

Koordinaten des Berührpunkts:

Tangentengleichung

Wie bei der Ellipse zeigt man, dass für einen Punkt $P(x_0, y_0)$ „ausserhalb“ der Parabel die obige Gleichung die Polare von P_0 beschreibt.

Herleitung mittels Differenzialrechnung

Um die Gleichung der Tangente an eine Parabel zu bestimmen, verwenden wir wieder die Ableitung der impliziten Funktion:

Steigung der Tangente im Parabelpunkt $P(x_0, y_0)$:

Gleichung der Tangente im Punkt: $P(x_0, y_0)$:

Satz

Die Gleichung der Tangente [der Polare] der Parabel mit der Gleichung $y = 2px$ im Parabelpunkt [bezüglich dem Punkt] $P(x_0, y_0)$ lautet:

Beispiel 2.2

Bestimme die Berührungspunkte und die Gleichungen der beiden Tangenten an die Parabel mit der Gleichung

$$y^2 = 4x,$$

welche durch den Punkt $P(-2, 1)$ gehen.

P liegt nicht auf der Parabel, denn $1^2 \neq 4 \cdot (-2)$.
Gleichung der Polare:

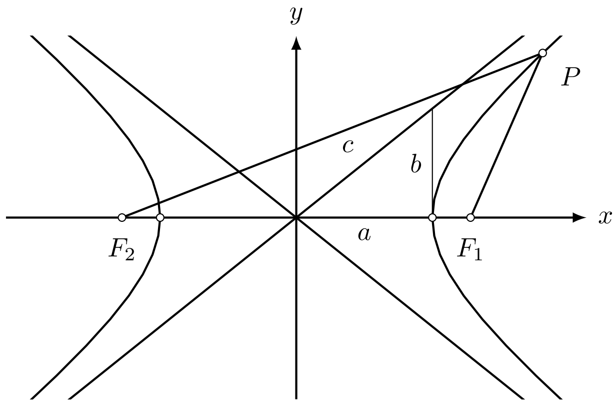
Schnittpunkte von Polare und Parabel:

Berührpunkte in die Tangentengleichungen einsetzen:

2.7 Die Hyperbelgleichung

Gegeben: Eine zu den Koordinatenachsen symmetrische Hyperbel, deren Hauptachse mit der x-Achse zusammenfällt.

Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(c, 0)$ und $F_2(-c, 0)$ und die Scheitelpunkte $S_1(a, 0)$ bzw. $S_2(-a, 0)$ mit $c > a$. Wir legen eine Strecke der Länge b durch die Beziehung $b^2 = c^2 - a^2$ fest.



Für einen Punkt $P(x, y)$ auf der Hyperbel gilt:

Mit $b^2 = c^2 - a^2$ erhält man die Gleichung einer zu den Koordinatenachsen symmetrischen Hyperbel, deren Scheitelpunkte auf der x-Achse liegen und den Abstand $2a$ haben.

Satz

Die Gleichung einer Hyperbel mit dem Mittelpunkt $M(0,0)$ und den Halbachsen a und b lautet

Dabei fallen die Hyperbelachsen mit den Koordinatenachsen zusammen.

Bemerkungen

- Die Streckenlänge b mit $b^2 = c^2 - a^2$ ist die *imaginäre Halbachse* der Hyperbel.
- Die Punkte $S_3(0,b)$ und $S_4(0,-b)$ nennt man die *Nebenscheitel* der Hyperbel.
- Löst man die Hyperbelgleichung nach y auf, so erhält man für für grosse $|x|$:

  $y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - 1} \approx \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2}$

  Die Geraden $y = \pm\frac{b}{a}x$ sind die Asymptoten der Hyperbel.

2.8 Tangenten an Hyperbeln

Analog wie bei der Ellipse erhalten wir die Gleichung der Tangente [Polare] für einen Hyperbelpunkt [beliebigen Punkt] $P(x_0, y_0)$:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Beispiel 2.3

Bestimme die Berührpunkte der beiden Tangenten vom Punkt $Q(2,2)$ aus an die Hyperbel mit der Gleichung

$$h\colon \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$