

Der z -Test für eine Proportion

Beispiel 1

Die Problemstellung

Es soll untersucht werden, ob Schüler und Schülerinnen an deutschschweizer Mittelschulen lieber Englisch als Französisch lernen.

Schritt 1: Formulierung der Hypothesen

- H_1 : Schüler und Schülerinnen an deutschschweizer Gymnasien lernen lieber Englisch als Französisch
- H_0 : Schüler und Schülerinnen an deutschschweizer Gymnasien lernen nicht lieber Englisch als Französisch

Schritt 2: Die Stichprobe

An zufällig ausgewählten Gymnasien in der Deutschschweiz konnten Zufallsstichproben durchgeführt werden, in denen jeweils gleich viele Schülerinnen und Schüler befragt wurden. Hier die Resultate:

Antwort	Anzahl
Ich lerne lieber Englisch als Französisch	57
Ich lerne nicht lieber Englisch als Französisch	43

Schritt 3: Die Wahl des Signifikanzniveaus

Üblicherweise wird $\alpha = 5\%$ vor der Durchführung eines Tests festgesetzt.

Schritt 4: Die Wahl des Tests

Der z -Test für eine Proportion berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man unter der Voraussetzung der Nullhypothese (also bei zufälliger Entscheidung für Englisch) in einer Stichprobe vom Umfang 100 ein Verhältnis von 0.57 oder grösser erhält.

Schritt 5: Formulierung der statistischen Hypothesen

Wenn man den Anteil der Schüler in der Grundgesamtheit, die lieber Englisch als Französisch lernen, mit p bezeichnet (p wie Proportion), lassen sich die beiden Hypothesen wie folgt quantitativ darstellen:

$$H_0: p \leq 0.5$$

$$H_1: p > 0.5 \quad (\text{einseitig/rechtsseitig})$$

Die Stichprobe liefert die Schätzung $\hat{p} = 57/100 = 0.57$ für dieses Verhältnis, wobei das Dach über dem Parameter p zum Ausdruck bringt, dass es sich um eine Schätzung handelt.

Schritt 6: Überprüfung der Voraussetzungen

Der z -Test für eine Proportion ist im Grunde ein Ersatz für den passenderen aber rechnerisch aufwändigeren Binomialtest.

Je grösser der Stichprobenumfang n ist, desto weniger unterscheiden sich die Ergebnisse von z -Test und Binomialtest.

Gilt $np_0(1 - p_0) > 9$, so darf der z -Test angewendet werden.

Wie man sofort nachrechnet, ist diese Bedingung erfüllt:

$$np_0(1 - p_0) = 100 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 25 > 9$$

Schritt 7: Durchführung des Tests mit dem TI-84+

Öffne mit der Taste `[stat]` das Statistik-Menü, gehe dort ins TESTS-Untermenü und wähle unter 5: den z -Test für eine Proportion aus.

```
EDIT CALC TESTS
1:Z-Test...
2:T-Test...
3:2-SampZTest...
4:2-SampTTest...
5:1-PropZTest...
6:2-PropZTest...
7↓ZInterval...
```

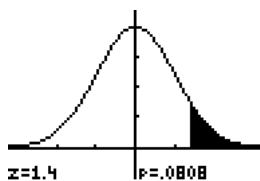
- Gib die Proportion der Nullhypothese ein. ($p_0 = 0.5$)
- Gib die Anzahl der Personen ein, welche die Alternativhypothese stützen. ($x = 57$)
- Gib den Umfang der Stichprobe ein. ($n = 100$)
- Wähle den rechtsseitigen Test gemäss H_1 .

```
1-PropZTest
P0: .5
x: 57
n: 100
PROP≠P0 <P0 >P0
Calculate Draw
```

Wähle Calculate und drücke `[enter]`, wenn dich bloss das Resultat interessiert.

```
1-PropZTest
PROP>.5
z=1.4
P=.0807567112
p=.57
n=100
```

Wähle Draw und drücke `[enter]`, wenn der p -Wert als Fläche unter der Verteilungskurve dargestellt werden soll.



Schritt 8: Interpretation des Resultats

Da der p -Wert von 0.0808 über dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ liegt, entscheiden wir uns dafür, die Nullhypothese *beizubehalten*.

Schritt 9: Darstellung des Resultats

Die Behauptung, dass Gymnasiasten und Gymnasiastinnen lieber Englisch als Französisch lernen, kann durch die Resultate der Umfrage nicht gestützt werden (z -Test für eine Proportion, einseitig, $\alpha = 0.05$ $p = 0.081$, $n = 100$).

Beispiel 2

Die Problemstellung

Vor 10 Jahren wurde an einer grossen Mittelschule untersucht, welcher Anteil der 16-jährigen Schüler Raucher sind. Damals wurde ein Anteil von 10% ermittelt.

In einer aktuellen Untersuchung soll festgestellt werden, ob sich dieser Anteil in den letzten 10 Jahren (signifikant) verändert hat.

Schritt 1: Formulierung der Hypothesen

- H_1 : Der Anteil der Raucher unter den 16-jährigen Schülern der Schule beträgt nicht 10%.
- H_0 : Der Anteil der Raucher unter den 16-jährigen Schülern der Schule beträgt 10%.

Schritt 2: Die Stichprobe

Es werden zufällig 100 Schüler ausgewählt und befragt. Hier die Resultate:

Antwort	Anzahl
Ich rauche	4
Ich rauche nicht	96

Schritt 3: Die Wahl des Signifikanzniveaus

Üblicherweise wird $\alpha = 5\%$ vor der Durchführung eines Tests festgesetzt.

Schritt 4: Die Wahl des Tests

Der z -Test für eine Proportion berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man unter der Voraussetzung der Nullhypothese in einer Stichprobe vom Umfang 50 ein Verhältnis ungleich 0.1 erhält.

Schritt 5: Formulierung der statistischen Hypothesen

Anteil der rauchenden 16-jährigen Schüler: p

$$H_0: p = 0.1$$

$$H_1: p \neq 0.1 \quad (\text{zweiseitig})$$

Schritt 6: Überprüfung der Voraussetzungen

Wir müssen prüfen, ob $np_0(1 - p_0) > 9$ erfüllt ist.

$$np_0(1 - p_0) = 100 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 9 > 9$$

Streng genommen ist die Bedingung nicht erfüllt. In diesem Fall würde man den z -Test dennoch anwenden und am Ende prüfen, ob der p -Wert noch etwas Spielraum zulässt.

Schritt 7: Durchführung des Tests mit dem TI-84+

Öffne mit der Taste `stat` das Statistik-Menü, gehe dort ins TESTS-Untermenü und wähle unter 5: den z -Test für eine Proportionen aus.

```
EDIT CALC TESTS
1:Z-Test...
2:T-Test...
3:2-SampZTest...
4:2-SampTTest...
5:1-PropZTest...
6:2-PropZTest...
7:ZInterval...
```

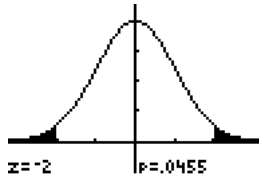
- Gib die Proportion der Nullhypothese ein. ($p_0 = 0.1$)
- Gib die Anzahl der Personen ein, welche die Alternativhypothese stützen. ($x = 4$)
- Gib den Umfang der Stichprobe ein. ($n = 100$)
- Wähle den rechtsseitigen Test gemäss H_1 .

```
1-PropZTest
P0: .1
x: 4
n: 100
PROPT P0 <P0 >P0
Calculate Draw
```

Wähle Calculate und drücke `enter`, wenn dich bloss das Resultat interessiert.

```
1-PropZTest
PROP#.1
z=-2
P=.045500124
p=.04
n=100
```

Wähle Draw und drücke , wenn der p -Wert als Fläche unter der Verteilungskurve dargestellt werden soll.



Schritt 8: Interpretation des Resultats

Da der p -Wert von 0.0455 unter dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ liegt, entscheiden wir uns dafür, die Nullhypothese *zu verwerfen*.

Rechnet man mit einem Statistikprogramm den p -Wert mit dem exakten Binomialtest, erhält man sogar $p = 0.0443$, was die Anwendung des z -Tests nachträglich rechtfertigt.

Schritt 9: Darstellung des Resultats

Die Behauptung, dass sich an der Schule unter den 16-jährigen Schülern der Anteil der Raucher verändert hat, wird durch die Resultate der Umfrage gestützt (z -Test für eine Proportion, zweiseitig, $\alpha = 0.05$ $p = 0.0455$, $n = 100$).

Aufgaben

Führe jeweils den z -Test für eine Proportion durch ($\alpha = 0.05$).

- Notiere die statistischen Hypothesen.
- Überprüfe die Voraussetzungen.
- Führe den Test mit dem Taschenrechner durch.
- Formuliere das Testergebnis.

Übung 1

Unterscheidet sich der Anteil der männlichen Babies signifikant von 0.5? In einer Stichprobe von 200 Babies sind 96 männlich.

Statistische Hypothesen: $H_1: p \neq 0.5$
 $H_0: p = 0.5$

Voraussetzungen: $200 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 50 > 9$ (ok)

Durchführung mit dem TR: Sollte klar sein

Aufgrund der Stichprobe unterscheidet sich der Anteil der männlichen Babies nicht signifikant von 0.5 (z -Test für eine Proportion, zweiseitig, $\alpha = 0.05$ $p = 0.572$, $n = 200$).

Übung 2

Ist der Anteil der Glacékonsumenten die Schokoladearoma dem Vanillearoma vorziehen kleiner als 80%? In einer Stichprobe von 50 Konsumenten haben 60% dem Schokoladeneis den Vorzug gegeben.

Statistische Hypothesen: $H_1: p < 0.8$
 $H_0: p \geq 0.8$

Voraussetzungen: $50 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 32 > 9$ (ok)

Durchführung mit dem TR: Sollte klar sein

Aufgrund der Stichprobe liegt der Anteil derjenigen Glacékonsumenten, die lieber Schokolade als Vanilleeis essen signifikant unter 0.8 (z -Test für eine Proportion, einseitig, $\alpha = 0.05$ $p = 0.0002$, $n = 50$).

Übung 3 (Praxisbeispiel)

Untersucht die Vermutung, dass eine Mehrheit der Schweizer Jugendlichen gegen die Einführung einer Steuer auf Süssgetränke ist.

p : Anteil der Jugendlichen, die gegen die Einführung einer solchen Steuer sind.

Statistische Hypothesen: $H_1: p > 0.5$
 $H_0: p = 0.5$

Voraussetzungen:

Durchführung mit dem TR:

Ergebnis: