Der χ^2-Test

Überblick

Beim χ^2-Test handelt es sich um eine Familie ähnlicher Tests, die bei nominal- oder ordinalskalierten Merkmalen mit zwei oder mehr Ausprägungen angewendet werden können.

Wir behandeln hier die folgenden Varianten

- den χ^2-Anpassungs- oder Verteilungstest (Goodness-of-fit-Test)
- den χ^2-Unabhängigkeitstest

Beispiel 1 (χ^2-Anpassungstest)

Die Fragestellung

Schokoladenlinsen einer bestimmten Marke haben Zuckerüberzüge in den Farben rot, grün, blau gelb und braun.

Unterscheiden sich in den Packungen die Häufigkeiten der Farben signifikant von der Gleichverteilung?

Schritt 1: Formulierung der Hypothesen

- H_0: Die relativen Häufigkeiten aller Farben sind gleich gross; d. h. $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0.2$
- H_1: Die Häufigkeit mindestens einer Farbe weicht von 0.2 ab.

Bei mehr als zwei Kategorien, gibt es unterschiedliche Formen der Abweichung. Daher ist eine Unterscheidung in ein- und zweiseitige Tests nicht sinnvoll.

Schritt 2: Die Stichprobe

In einem zufällig ausgewählten Geschäft wird eine Packung gekauft und die Farben der Bonbons ausgezählt.

Dies ergibt die *beobachteten Häufigkeiten* (b):

Farbe	rot	grün	blau	gelb	braun
Anzahl (b_i)	29	23	21	32	20

Da es sich um insgesamt 125 Bonbons handelt, würden wir bei Gleichverteilung jeweils 25 Bonbons von jeder Farbe erwarten. Daraus ergibt sich die Tabelle mit den *erwarteten Häufigkeiten* (e):

Farbe	rot	grün	blau	gelb	braun
Anzahl (e_i)	25	25	25	25	25

Schritt 3: Die Wahl des Signifikanzniveaus

Üblicherweise wird $\alpha = 5\%$ *vor* der Durchführung eines Tests festgesetzt.

Schritt 4: Die Wahl des Tests

Das dem χ^2-Test zugrunde liegende Konzept ist leicht zu verstehen.

Für jede Farbe berechnet man das Quadrat der Differenz zwischen der beobachteten und der erwarteten Häufigkeiten und relativiert diesen Wert, indem man ihn durch die erwartete Häufigkeit teilt:

$$\frac{(b_i - e_i)^2}{e_i} \quad (i = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5)$$

Anschliessend bildet man die Summe dieser Werte und bezeichnet sie mit χ^2.

	rot	grün	blau	gelb	braun	Summe
b_i	29	23	21	32	20	125
e_i	25	25	25	25	25	125
$(b_i - e_i)^2/e_i$	0.64	0.16	0.64	1.96	1	4.4

- Je mehr die beobachteten von den erwarteten Häufigkeiten abweichen, desto grösser wird χ^2.
- Wegen der quadrierten Abweichungen gilt $\chi^2 \geq 0$.
- Da die Randsummen der erwarteten und der beobachteten Häufigkeiten übereinstimmen müssen, sind im Grunde nur 4 der 5 erwarteten Häufigkeiten frei wählbar. Deshalb liegen hier $\mathrm{df} = 4$ *Freiheitsgrade* vor.

Schritt 5: Überprüfung der Voraussetzungen

Da der χ^2-Test im Grunde wieder eine Näherungslösung für das eigentliche Testproblem darstellt, müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein, damit diese Näherung ausreichend nahe bei der echten Lösung liegt.

- Die beobachteten Häufigkeiten stammen aus einer Zufallsstichprobe.
- Die erwarteten Häufigkeiten pro Zelle sollten grösser als 5 sein.

Somit sind im Beispiel die Voraussetzungen erfüllt.

Schritt 6: Durchführung des Tests mit dem TI-84+

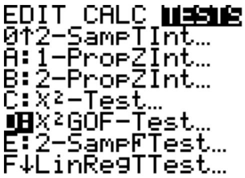
Speichere die beobachteten Häufigkeiten z. B. in der Liste `L₁`:

`{29,23,21,32,20}` $\rightarrow$ `L₁`

Speichere die erwarteten Häufigkeiten z. B. in der Liste `L₂`:

{25,25,25,35,25}→ L_2

Öffne mit stat das Statistik-Menü, gehe ins TESTS-Untermenü und wähle D:χ^2GOF-Test.... (GOF steht für *Goodness-of-fit.*)



- Gib die Liste mit den beobachteten Häufigkeiten ein. (L_1)

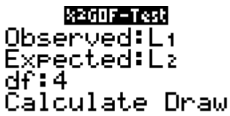
  Diese Liste darf weder negative noch gebrochene Zahlen enthalten.

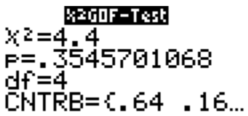
- Gib die Liste mit den erwarteten Häufigkeiten ein. (L_2)

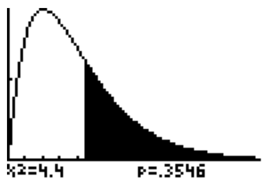
  Diese Liste darf gebrochene aber keine negativen Zahlen enthalten.

- Gib die Anzahl der Freiheitsgrade ein. (df $= 4$)

- Wähle Calculate für die numerische Darstellung des Testresultats oder Draw für seine grafische Darstellung.







Wähle Draw und drücke enter, für eine grafische Darstellung (mit weniger Zahlen).

Schritt 7: Interpretation des Resultats

Da der p-Wert von 0.355 über dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ liegt, entscheiden wir uns dafür, die Nullhypothese *beizubehalten.*

Schritt 8: Darstellung des Resultats

Ein χ^2-Anpassungstest zeigt, dass die beobachteten Häufigkeiten nicht signifikant von der Gleichverteilung abweichen ($\chi^2(4, N = 125) = 4.4$, $p = 0.355$). Daher kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

Bemerkung

Der χ^2-Anpassungstest ist nicht darauf beschränkt, wie im obigen Beispiel die Hypothese einer Gleichverteilung zu überprüfen. Die Stichprobendaten können damit auf beliebige Verteilungsformen getestet werden, so lange diese durch endlich viele Kategorien dargestellt werden kann.

Beispiel 2 (χ^2-Unabhängigkeitstest)

Die Fragestellung

Es soll untersucht werden, ob es einen Zusammenhang zwischen der Häufigkeit des Konsums von Fast Food und der Grösse des Haushalts gibt, in der eine Person lebt.

Um dies herauszufinden, versucht man nachzuweisen, dass es eben keinen Zusammenhang gibt, dass diese beiden Faktoren unabhängig voneinander sind.

Schritt 1: Formulierung der Hypothesen

- H_0: Die Merkmale „Häufigkeit des Konsums von Fast Food“ und „Grösse des Haushalts“ sind unabhängig voneinander.
- H_1: Die Merkmale „Häufigkeit des Konsums von Fast Food“ und „Grösse des Haushalts“ sind abhängig voneinander.

Schritt 2: Die Stichprobe

Umfrageergebnisse werden in einer Kontingenztafel (Kreuztabelle) zusammengestellt:

	Single	Paar	Familie	Summe
≥ 1 Mal pro Monat	18	7	5	30
< 1 Mal pro Monat	32	53	65	150
	50	60	70	180

Schritt 3: Die Wahl des Signifikanzniveaus

Üblicherweise wird $\alpha = 5\%$ *vor* der Durchführung eines Tests festgesetzt.

Schritt 4: Die Wahl des Tests

Das Prinzip ist dasselbe wie beim χ^2-Anpassungstest.

Um die erwarteten Häufigkeiten zu berechnen, geht man davon aus, dass die Randhäufigkeiten fest gegeben sind. Damit bestimmt man dann die Häufigkeiten im Innern der Tabelle:

	Single	Paar	Familie	Summe
≥ 1 Mal pro Monat	8.33	10	11.67	30
< 1 Mal pro Monat	51.67	50	58.33	150
	50	60	70	180

Das Element mit dem Wert 10 in der 1. Zeile und 2. Spalte wird berechnet, indem man das Produkt aus der Summe der 1. Zeile (30) und der Summe der 2. Spalte (60) durch das Gesamttotal (180) dividiert. So verfährt man auch mit den übrigen Elementen.

Dann Berechnet man χ^2 indem man die Summe der Terme

$$\frac{(b_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

über alle beobachteten und erwarteten Häufigkeiten in den Zellen mit der Zeilennummer i und der Spaltennummer j bildet.

Im Beispiel:

$$\chi^2 = \frac{(18 - 8.33)^2}{8.33} + \cdots + \frac{(65 - 58.33)^2}{58.33} = 19.11$$

Schritt 5: Überprüfung der Voraussetzungen

Die Voraussetzungen sind erfüllt, da die erwarteten Häufigkeiten in jeder Zelle grösser als 5 sind.

Die Anzahl der Freiheitsgrade berechnet sich in diesem Fall nach der Formel:

ist n_z die Anzahl der Merkmale in den Zeilen und n_s die Anzahl der Merkmale in den Spalten, so gilt:

$\text{df} = (n_z - 1)(n_s - 1) = (2 - 1)(3 - 1) = 1 \cdot 2 = 2$

Schritt 6: Durchführung des Tests mit dem TI-84+

Speichere die beobachteten Häufigkeiten in einer Matrix ab. (Eine Matrix ist eine rechteckige Zahlentabelle.)

Um Daten in einer Matrix zu speichern, muss man zuerst mit [2nd] [matrix] das Matrix-Menü öffnen. Dort wählt man das Untermenü `EDIT`.

```
NAMES MATH EDIT
1:[A]
2:[B]
3:[C]
4:[D]
5:[E]
6:[F]
7↓[G]
```

- Wähle mit den Pfeiltasten eine Matrixvariable aus (hier `[A]`) und gib dann die Anzahl der Zeilen (2) und dann die Anzahl der Spalten (3) ein. Anschliessend lassen sich die Werte in der Tabelle eingeben.
- Die Matrix mit den erwarteten Häufigkeiten wird später vom TI-84+ automatisch bestimmt und muss nicht berechnet und eingegeben werden.

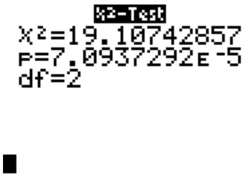
```
MATRIX[A] 2 ×3
[ 18    7    5  ]
[ 32    53   65 ]



2,3=65
```

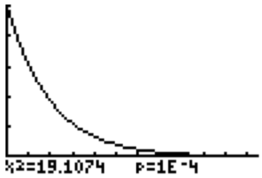
Öffne mit [stat] das Statistik-Menü, gehe ins Untermenü `TESTS` und wähle dort den Eintrag χ^2`-Test...` aus.

```
EDIT CALC TESTS
0↑2-SampTInt…
A:1-PropZInt…
B:2-PropZInt…
C:χ²-Test…
D:χ²GOF-Test…
E:2-SampFTest…
F↓LinRegTTest…
```

Im folgenden Menü muss unter `Observed` via `NAMES` im Matrix-Menü die Matrix `[A]` ausgewählt werden. Unter `Expected` kann eine beliebige andere Matrix angegeben werden. Diese wird überschrieben.

Wähle `Calculate` für die numerische Darstellung des Testresultats oder `Draw` für seine grafische Darstellung.





Schritt 7: Interpretation des Resultats

Da der p-Wert von 0.00007 unter dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ liegt, entscheiden wir uns dafür, die Nullhypothese *zu verwerfen.*

Schritt 8: Darstellung des Resultats

Ein χ^2-Anpassungstest zeigt, dass sich die beobachteten Häufigkeiten signifikant von den erwarteten Häufigkeiten unterscheiden ($\chi^2(4, N = 180) = 19.1$, $p < 0.001$). Daher wird die Nullhypothese verworfen.

Aufgaben

Führe jeweils einen χ^2-Test auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch.

- Notiere die statistischen Hypothesen.
- Überprüfe die Voraussetzungen.
- Führe den Test mit dem Taschenrechner durch.
- Formuliere das Testergebnis.

Übung 1

Sind die Merkmale „Arbeitszeitmodell“ und „Geschlecht“ unabhängig voneinander?

	männlich	weiblich	Summe
vollzeit beschäftigt	60	26	86
teilzeit beschäftigt	2	16	18
wenig beschäftigt	4	8	12
nicht erwerbstätig	34	50	84
Summe	100	100	200

Hypothesen:

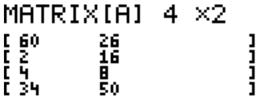
H_1: Die beiden Merkmale sind unabhängig voneinander
H_0: Die beiden Merkmale sind abhängig voneinander

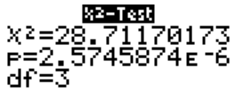
erwartete Häufigkeiten:

	männlich	weiblich	Summe
vollzeit beschäftigt	43	43	86
teilzeit beschäftigt	9	9	18
wenig beschäftigt	6	6	12
nicht erwerbstätig	42	42	84
Summe	100	100	200

Voraussetzungen: erfüllt (jedes innere Feld ist > 10)

Durchführung mit dem TR:





Resultat:

Ein χ^2-Anpassungstest zeigt, dass die beobachteten Häufigkeiten signifikant von den erwarteten abweichen ($\chi^2(3, N = 200) = 28.7$, $p < 0.01$). Daher ist die Nullhypothese zu Gunsten der Alternativhypothese zu verwerfen.