Aufgabe 1.1

(a) $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(b) $A \cap B = \{5\}$

(c) $A \cap C = \{\,\}$

(d) $B \setminus A = \{4, 6, 7\}$

(e) $C \setminus B = \{2\}$

(f) $\overline{B} = \Omega \setminus B = \{1, 2, 3, 8, 9\}$

Aufgabe 1.2

(a) $\overline{A} = \{6, 7, 8, 9\}$

(b) $\overline{B} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$

(c) $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$

(d) $B \setminus A = \{6, 7\}$

(d) $A \setminus C = \{1, 2\}$

(c) $C \setminus A = \emptyset$

(e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$

(f) $\overline{A \cup B} = \{8, 9\}$

(g) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$

(h) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{8, 9\}$

Aufgabe 1.3

(a) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

(b) $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

(c) $B^2 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

(d) $(A \times B) \setminus (B \times A) = \{(1, 2), (1, 3)\}$

(e) $(A \times A) \setminus (B \times B) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$

Aufgabe 1.4

(a) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

(b) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$

(c) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,b,c\}\}$

Aufgabe 1.5

(a) $2^4 = 16$ Teilmengen

(b) $2^{10} = 1024$ Teilmengen

(c) 2^n Teilmengen

Aufgabe 1.6

Zu zeigen ist, dass für jedes $x \in A$ folgt, dass $x \in C$.
Sei nun $x \in A$ beliebig
Wegen $A \subset B$ folgt $x \in B$
Wegen $B \subset C$ folgt $x \in C$
Somit ist die Behauptung bewiesen. Λ

Aufgabe 1.7

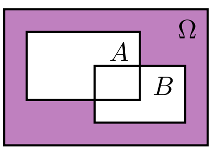
Mit $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ und $C = \{2,4\}$ gilt:
$A \cap B = \{2\} = A \cap C$ aber $B \neq C$

Aufgabe 1.8

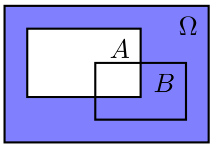
$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in \Omega \mid x \in A \land x \notin B\} \\ &= \{x \in \Omega \mid x \in A \land x \in (\Omega \setminus B)\} \\ &= \{x \in \Omega \mid x \in A \land x \in \overline{B}\} \\ &= A \cap \overline{B} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.9

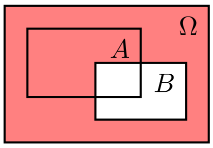
(a) $\overline{A \cup B}$



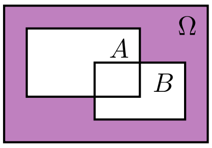
$\overline{A}$



$\overline{B}$



$\overline{A} \cap \overline{B}$



Aufgabe 1.10

(a) A ist endlich

(b) B ist endlich

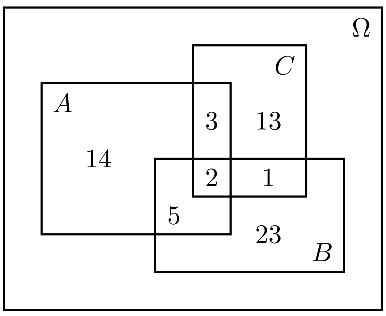
(c) C ist überabzählbar unendlich

(d) D ist abzählbar unendlich

(e) E ist endlich

(f) F ist endlich

Aufgabe 1.11



(a) Mindestens eine der drei Zeitungen:

$2 + 5 + 1 + 3 + 14 + 23 + 13 = 61$

(b) Keine der drei Zeitungen:

$70 - 61 = 9$

(c) Genau eine der drei Zeitungen:

$14 + 23 + 13 = 50$

Aufgabe 2.1

(a) $\Omega = \big\{(t,t),(t,\bar{t}),(\bar{t},t),(\bar{t},\bar{t})\big\}$

(t = Treffer, $\bar{t}$ = kein Treffer)

(b) $\Omega = \big\{www, wwz, wzw, wzz, zww, zwz, zzw, zzz\big\}$

(w = Wappen, z = Zahl)

(c) $\Omega = \big\{ss, sr, sw, ws, wr, ww, rs, rw\big\}$

(s = schwarz, r = rot, w = weiss)

(d) $$\begin{aligned}\Omega = \big\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),\\ &(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),\\ &(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\big\}\end{aligned}$$

(e) $\Omega = \big\{(5),(\overline{5},5),(\overline{5},\overline{5},5),(\overline{5},\overline{5},\overline{5},5),\dots\big\}$

oder kürzer: $\Omega = \big\{E_1, E_2, E_3, E_4, \dots\big\}$

mit E_i: beim i-ten Wurf erscheint erstmals die Augenzahl 5

Aufgabe 2.2

(a) E: Es liegt genau einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt zweimal oder gar nicht *Wappen* oben.

(b) E: Es liegt mindestens einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt kein *Wappen* oben.

(c) E: Das Auto passiert beide Ampeln bei „grün“.

$\overline{E} = \{(g,r),(g,o),(r,g),(o,g),(o,o),(r,r),(o,r),(r,o)\}$

Aufgabe 2.3

(a) $E_1 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$E_2 = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),\dots,(6,6)\}$

$E_1 \cap E_2 = \{(2,6),(4,4),(6,2)\}$

(b) $E_1 = \{(2,5),(5,2)\}$

$E_2 = \{(6,1),(1,6)\}$

$E_1 \cup E_2 = \{(1,6),(2,5),(5,2),(6,1)\}$

(c) $E_1 = \{(4,6),(5,5),(6,4)\} \cup \{(5,6),(6,5)\} \cup \{(6,6)\}$

$E_2 = \{(4,6),(6,4)\}$

$E_1 \cap \overline{E_2} = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$

(b) Das sichere Ereignis?

Ω

(c) Welche Ereignisse sind Elementarereignisse?

$E = \{5\}$

(d) Welche Ereignisse ziehen andere nach sich?

$A \subset B$, $D \subset C$

(e) Bestimme das Ereignis „C oder D tritt ein“.

$C \cup D = \{1, 3, 4, 5\}$

Aufgabe 2.4

(f) Bestimme das Ereignis „Ereignis C und D tritt ein“.

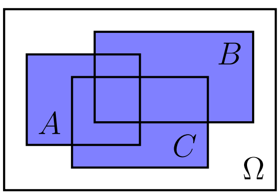
$C \cap D = \{3\}$

(g) Welche Ereignisse sind (paarweise) unvereinbar?

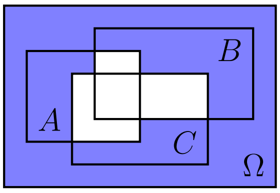
- A und C
- A und D
- A und E
- B und C
- B und E
- D und E

Aufgabe 2.5

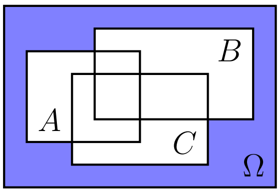
(a) $A \cup B \cup C$



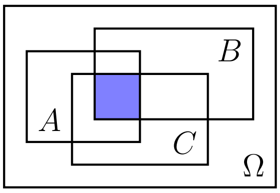
(b) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$



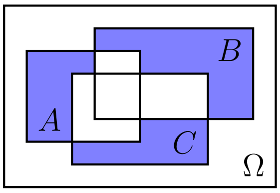
(c) $(A \cup B \cup C)^c$



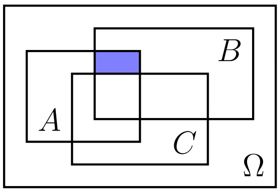
(d) $A \cap B \cap C$



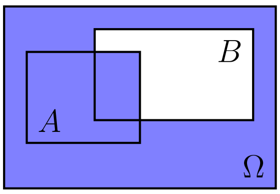
(e) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$



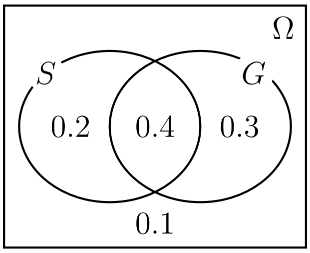
(f) $A \cup B \cap C^c$



(g) $A \cup B^c$



Aufgabe 2.6



(a) $P(\text{schnell und genau}) = 0.4$

(b) $P(\text{schnell aber nicht genau}) = 0.3$

(c) $P(\text{weder schnell noch genau}) = 0.1$

Aufgabe 2.7

(a) $P(A) = P(\{2,4,6\}) = \frac{1}{2}$

(b) $P(B) = P(\{2,3,5\}) = \frac{1}{2}$

(c) $P(C) = P(\{3,4,5,6\}) = \frac{2}{3}$

(d) $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$

(e) $P(B \cup C) = P(\{2,3,4,5,6\}) = \frac{5}{6}$

(f) $P(A \cap B \cap C) = P(\{\,\}) = 0$

(g) $P(\overline{A} \cup B) = P(\{3,5\}) = \frac{1}{3}$

(h) $P(A \cup B \cup \overline{C}) = P(\{1,2,3,4,5,6\}) = 1$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

$$\overset{\text{DG}}{=} P([A \cap B] \cup [A \cap \overline{B}]) \overset{(3)}{=} P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

(d) Stelle $A \cup B$ als Vereinigung disjunkter Mengen dar:

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$$

$$\overset{(c)}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aufgabe 2.9

(a) $P(\text{WWW}) = \dfrac{1}{8}$

(b) $P(\text{WZW}) = \dfrac{1}{8}$

(c) $P(\text{WWZ}) + P(\text{WZW}) + P(\text{ZWW}) = \dfrac{3}{8}$

(d) $P(\text{WWW}) + P(\text{WWZ}) + P(\text{WZW}) + P(\text{ZWW}) = \dfrac{1}{2}$

Aufgabe 2.10

(a) $$\begin{aligned} E &= \big\{(x,y)\colon X = Y\big\} \\ &= \big\{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\big\} \end{aligned}$$
$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) $$\begin{aligned} E &= \big\{(x,y)\colon X + Y > 10\big\} \\ &= \big\{(5,6),(6,5),(6,6)\big\} \end{aligned}$$
$$P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(c) $$\begin{aligned} E &= \big\{(x,y)\colon Y \neq 4\big\} \\ &= \Omega \setminus \big\{(1,4),(2,4),\ldots,(6,4)\big\} \end{aligned}$$
$$P(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(d) $$\begin{aligned} E &= \big\{(x,y)\colon X - Y = 2\big\} \\ &= \big\{(6,4),(5,3),(4,2),(3,1)\big\} \end{aligned}$$
$$P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(e) $$\begin{aligned} E &= \big\{(x,y)\colon |X - Y| = 3\big\} \\ &= \big\{(6,3),(3,6),(5,2),(2,5),(4,1),(1,4)\big\} \end{aligned}$$
$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(f) $$\begin{aligned} E &= \big\{(x,y)\colon \max(X,Y) = 4\big\} \\ &= \big\{(4,4),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4)\big\} \end{aligned}$$
$$P(E) = \frac{5}{36}$$

Aufgabe 2.11

$x =$ Anzahl rote Kugeln

(a)
$$\begin{aligned} P(w) &= \frac{1}{3} \\ \frac{7}{7+5+x} &= \frac{1}{3} \\ \frac{7}{12+x} &= \frac{7}{21} \\ x &= 9 \text{ rote Kugeln} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{1}{4} \\ \frac{x}{7+5+x} &= \frac{1}{4} \\ 4x &= 12+x \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \text{ rote Kugeln} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} P(b) &> \frac{3}{10} \\ \frac{5}{7+5+x} &> \frac{3}{10} \\ 50 &> 36+3x \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

2, 3, oder 4 rote Kugeln

Aufgabe 2.12

Die Aufgaben lassen sich mehr oder weniger „mechanisch“ lösen, wenn man zur Berechnung der Anzahl a, der durch d teilbaren Zahlen in der Menge

$$\{n_{\min}, n_{\min}+1, n_{\min}+2, \dots, n_{\max}-1, n_{\max}\}$$

folgende Funktion verwendet:

$$a = \left\lfloor \frac{n_{\max}}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_{\min}-1}{d} \right\rfloor$$

- Der Minuend zählt die Anzahl der der durch d teilbaren Zahlen in der Menge $\{0, 1, 2, \dots, n_{\max}\}$
- Der Subtrahend zählt die Anzahl der der durch d teilbaren Zahlen in der Menge $\{0, 1, 2, \dots, n_{\min}-1\}$

(a) $a = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = 99 - 9 = 90$

$$P(E) = \frac{90}{900} = 0.1$$

(b) $a = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor = 166 - 16 = 150$

$$P(\overline{E}) = 1 - \frac{150}{900} = \frac{5}{6}$$

(c) $a = \left\lfloor \frac{999}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{14} \right\rfloor = 71 - 7 = 64$

$$P(E) = \frac{64}{900} = \frac{16}{225}$$

(d) E_1: Zahl durch 2 teilbar: $a_1 = 450$

E_2: Zahl durch 7 teilbar: $a_2 = 128$

E_3: Zahl durch 14 teilbar: $a_3 = 64$

$$P(E) = \frac{450 + 128 - 2 \cdot 64}{900} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.13

(a) $P(A) = P\big(\{55\}\big) = \frac{1}{64}$

(b) $P(B) = P\big(\{18, 81, 27, 72, 36, 63, 45, 54\}\big) = \frac{8}{8^2} = \frac{1}{8}$

(c) $P(C) = P\big(\{51, \ldots, 58, 61, 62, \ldots, 68\}\big) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 2.14

4.4. bis 6.6: $30 + 31 + 2 = 63$ Tage

6.6. bis 8.8: $30 + 31 + 2 = 63$ Tage

8.8. bis 10.10: $31 + 30 + 2 = 63$ Tage

10.10. bis 12.10: $31 + 30 + 2 = 63$ Tage

Alle Differenzen sind durch 7 teilbar, also $p = 1$

Aufgabe 2.15

(a) $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p$; $P(6) = 2p$

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) &= 1 \\ 5p + 2p &= 1 \\ 7p &= 1 \\ P(4) = p &= 1/7 \end{aligned}$$

(b) $P(1) = k \cdot 1$, $P(2) = k \cdot 2$, $\ldots$, $P(6) = k \cdot 6$

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) &= 1 \\ k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k &= 1 \\ 21k &= 1 \\ k &= 1/21 \\ P(4) = 4k &= 4/21 \end{aligned}$$

(c) $P(1) = \frac{1}{15}$, $P(2) = \frac{1}{15} + d$, $\ldots$, $P(6) = \frac{1}{15} + 5d$

$$\begin{aligned} 1 &= P(1) + P(1) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) \\ 1 &= \tfrac{1}{9} + \left(\tfrac{1}{9} + d\right) + \left(\tfrac{1}{9} + 2d\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{9} + 5d\right) \\ 1 &= \tfrac{6}{9} + 15d \\ \tfrac{1}{3} &= 15d \\ d &= \tfrac{1}{45} \\ P(4) &= \tfrac{1}{9} + 3 \cdot \tfrac{1}{45} = \tfrac{8}{45} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.16

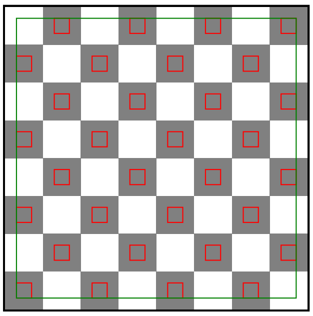
Inhalt der möglichen Landefläche für den Mittelpunkt des Ballquerschnitts:
$8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} = 64\,\text{cm}^2$

Inhalt der günstigen Landefläche für den Mittelpunkt des Ballquerschnitts:
$(8 - 5)\,\text{cm} \cdot (8 - 5)\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$

$$p = \frac{9}{64}$$

Aufgabe 2.17

Das Geldstück wird mit seinen Mittelpunkt M identifizert.



Inhalt der günstigen Orte für M: $g = 32(4-2)(4-2) = 128\,\text{cm}^2$

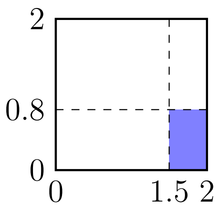
Inhalt der möglichen Orte für M: $m = (32-2)(32-2) = 900\,\text{cm}^2$

$P(\text{Münze innerhalb Schwarz}) = \dfrac{g}{m} = 0.142$

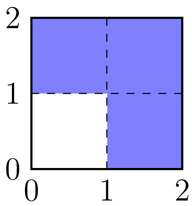
Aufgabe 2.18

Da der Flächeninhalt $2 \cdot 2 = 4$ beträgt, muss jeder Inhalt mit dem Faktor $\frac{1}{4} = 0.25$ multipliziert werden.

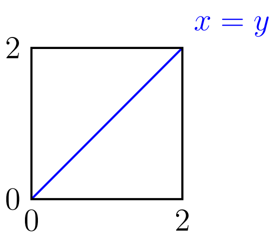
(a) $P(X \geq 1.5, Y \leq 0.5) = 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 0.1$



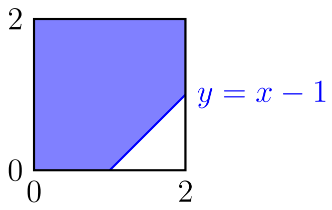
(b) $P(X > 1 \text{ oder } Y > 1) = 3 \cdot 0.25 = 0.75$



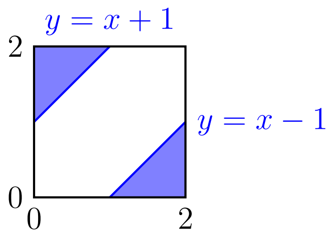
(c) $P(X = Y) = 0 \cdot 0.25 = 0$



(d) $P(X < Y + 1) = \dfrac{4 - 0.5}{4} = 0.875$

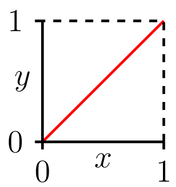


(e) $P(|X - Y| > 1) = \dfrac{0.5 + 0.5}{4} = 0.25$

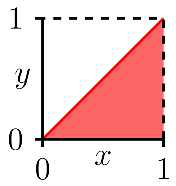


Aufgabe 2.19

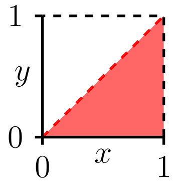
(a) $P(x = y) = 0$



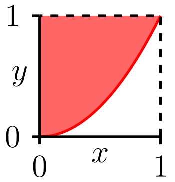
(b) $P(y \leq x) = \dfrac{1}{2}$



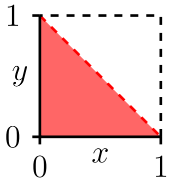
(c) $P(y < x) = \dfrac{1}{2}$



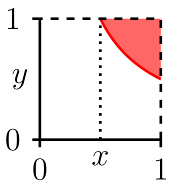
(d) $P(y > x^2) = 1 - \displaystyle\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = 1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



(e) $P(x+y \leq 1) \Leftrightarrow P(y \leq 1-x) = \dfrac{1}{2}$



(f) $$P\left(\frac{1}{2} \leq x \cdot y\right) = P\left(y \geq \frac{1}{2x}\right) = 0.5 - \int_{0.5}^{1} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$$
$$= 0.5 - \frac{1}{2}\big[\ln x\big]_{0.5}^{1}$$
$$= 0.5 - \frac{1}{2}(0 - \ln 0.5) = 0.153$$



Aufgabe 3.1

(a) A: zwei gleiche Augenzahlen

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

(b) A: zwei gleiche Augenzahlen

B: Die Summe der Augenzahlen ≤ 4

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{6/36} = 1/3$$

(c) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

(d) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.

D: Die Augenzahlen sind verschieden.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{10/36}{30/36} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 3.2

F: Max besucht das Freibad

B: Max spielt Beachvolleyball

K: Max geht ins Kino

L: Max lernt für die Prüfung

S: Sonne scheint

$\overline{B}$: Sonne scheint nicht

(a) $P(F) = P(S) \cdot P(F|S) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$

(b) $P(B) = P(S) \cdot P(B|S) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$

(c) $P(K) = P(\overline{S}) \cdot P(K|\overline{S}) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$

(d) $P(L) = P(\overline{S}) \cdot P(L|\overline{S}) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$

Aufgabe 3.3

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \mid C) &\overset{(B)}{=} \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} \overset{(D)}{=} \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\
&\overset{(B)}{=} P(A|C) + P(B|C)
\end{aligned}
$$

(B) Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

(D) Distributivgesetz von $\cap$ über $\cup$

(3) 3. Axiom von Kolmogoroff (A und B sind disjunkt)

Aufgabe 3.4

D: der Artikel ist defekt

$D\bar{D}\bar{D}\bar{D} \quad \bar{D}D\bar{D}\bar{D} \quad \bar{D}\bar{D}D\bar{D} \quad \bar{D}\bar{D}\bar{D}D$
$DD\bar{D}\bar{D} \quad D\bar{D}D\bar{D} \quad D\bar{D}\bar{D}D \quad \bar{D}DD\bar{D} \quad \bar{D}D\bar{D}D \quad \bar{D}\bar{D}DD$
$DDD\bar{D} \quad DD\bar{D}D \quad D\bar{D}DD \quad \bar{D}DDD$
$DDDD$

$P(\text{genau 1 } D) = 4 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} \cdot \frac{93}{97} = \frac{16\,609\,800}{94\,109\,400}$

$P(\text{genau 2 } D) = 6 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{95}{98} \cdot \frac{94}{97} = \frac{1\,071\,600}{94\,109\,400}$

$P(\text{genau 3 } D) = 4 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{95}{97} = \frac{22\,800}{94\,109\,400}$

$P(\text{genau 4 } D) = 1 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{2}{97} = \frac{120}{94\,109\,400}$

$P(\text{mind. ein Artikel ist defekt}) = \frac{17\,704\,320}{94\,109\,400} = \frac{147\,536}{784\,245} \approx 0.188$

einfacher via Gegenereignis:

$$
\begin{aligned}
P(\text{mind. ein Artikel defekt}) &= 1 - P(\text{kein Artikel defekt}) \\
&= 1 - P(\bar{D}\bar{D}\bar{D}\bar{D}) \\
&= 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \approx 0.188
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.5

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B|B) &\overset{(B)}{=} \frac{P((A \cap B) \cap B)}{P(B)} \overset{(A)}{=} \frac{P(A \cap (B \cap B))}{P(B)} \\
&\overset{(I)}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{(B)}{=} P(A|B)
\end{aligned}
$$

(B) Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

(A) Assoziativgesetz für $\cap$

(I) Idempotenz der Mengenoperationen $\cap$ und $\cup$

Aufgabe 3.6

i i i i – – – – – – – – – – – –

☐☐☐☐ ☐☐☐☐ ☐☐☐☐ ☐☐☐☐

$$\begin{aligned}P(A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

$P(A_1) = \frac{16}{16}$ (alle Möglichkeiten für Schülerin 1)

$P(A_2|A_1) = \frac{12}{15}$ (12 von 15 Plätzen für Schülerin 2)

$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{8}{14}$ (8 von 14 Plätzen für Schülerin 3)

$P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{13}$ (4 von 13 Plätzen für Schülerin 4)

$$P(A_4) = \frac{16}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{64}{455}$$

Aufgabe 3.7

(a) Baumdiagramm:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 1 \arrow[r, "0.2"] & 3 & 0.04 \\
{} \arrow[ur, "0.2"] \arrow[r, "0.6"] \arrow[dr, "0.2"'] & 2 \arrow[r, "0.6"] & 3 & 0.36 \\
 & 3 \arrow[r, "0.25"] & 3 & 0.05
\end{tikzcd}$$

$P(n_2 = 3) = 0.45$

(b) Baumdiagramm:

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & & 1 \arrow[r, "0.2"] & 1 & 0.008 \\
 & 1 \arrow[ur, "0.2"] \arrow[r, "0.6"] \arrow[dr, "0.2"'] & 2 \arrow[r, "0.0"] & 1 & 0 \\
 & & 3 \arrow[r, "0.5"] & 1 & 0.02 \\
 & & 1 \arrow[r, "0.2"] & 1 & 0 \\
{} \arrow[uuur, "0.2"] \arrow[r, "0.6"] \arrow[dddr, "0.2"'] & 2 \arrow[ur, "0.0"] \arrow[r, "0.4"] \arrow[dr, "0.6"'] & 2 \arrow[r, "0.0"] & 1 & 0 \\
 & & 3 \arrow[r, "0.5"] & 1 & 0.18 \\
 & & 1 \arrow[r, "0.2"] & 1 & 0.02 \\
 & 3 \arrow[ur, "0.5"] \arrow[r, "0.25"] \arrow[dr, "0.25"'] & 2 \arrow[r, "0.0"] & 1 & 0 \\
 & & 3 \arrow[r, "0.5"] & 1 & 0.025
\end{tikzcd}$$

$P(n_3 = 1) = 0.253$

Aufgabe 3.8

X_i ist die Farbe der Kugel in der i-ten Ziehung.

(a) $$P(X_1 = r) \cdot P(X_2 = r|X_1 = r) = P(X_1 = r, X_2 = r)$$
$$\frac{7}{10} \cdot P(X_2 = r|X_1 = r) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$$
$$P(X_2 = r|X_1 = r) = \frac{2}{3}$$

(b) $$P(X_1 = w) \cdot P(X_2 = r|X_1 = w) = P(X_1 = w, X_2 = r)$$
$$\frac{3}{10} \cdot P(X_2 = r|X_1 = w) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$$
$$P(X_2 = r|X_1 = w) = \frac{7}{9}$$

Aufgabe 3.9

F_i: Farbe der Kugel in der i-ten Ziehung

r: Anzahl rote Kugeln vor der Ziehung

$w = 400 - r$: Anzahl weisse Kugeln vor der Ziehung

$$\begin{aligned} P(F_1 = \text{rot}, F_2 = \text{weiss}) + P(F_1 = \text{weiss}, F_2 = \text{rot}) &= \frac{1}{2} \\ \frac{400-r}{400} \cdot \frac{r}{399} + \frac{r}{400} \cdot \frac{400-r}{399} &= \frac{1}{2} \\ \frac{2(400-r)r}{400 \cdot 399} &= \frac{1}{2} \\ (400-r)r &= 39\,900 \\ -r^2 + 400r - 39\,900 &= 0 \\ r_1 &= 190 \\ r_2 &= 210 \end{aligned}$$

190 rote und 210 weisse Kugeln (oder umgekehrt)

Aufgabe 4.1

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ &= 0.5 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.2 \cdot 0.05 \\ &= 0.037 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

Bayes:

$$P(U|W) = \frac{P(U) \cdot P(W|U)}{P(W)}$$

$$= \frac{P(U) \cdot P(W|U)}{P(K)P(W|K) + P(L)P(W|L) + P(F)P(W|F) + P(U)P(W|U)}$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.3}$$

$$= 0.0612$$

Aufgabe 4.3

WW: Münze mit Wappen–Wappen

WZ: Münze mit Wappen–Zahl

W^{10}: 10 Mal Wappen in Folge

$$P(WZ|W^{10}) = \frac{P(WZ, W^{10})}{P(W^{10})}$$

$$= \frac{P(W^{10}) \cdot P(WZ|W^{10})}{P(WW) \cdot P(W^{10}|WW) + P(WZ) \cdot P(W^{10}|WZ)}$$

$$= \frac{(1 - 10^{-3}) \cdot 2^{-10}}{10^{-3} \cdot 1 + (1 - 10^{-3}) \cdot 2^{-10}}$$

$$\approx \frac{(1 - 2^{-10}) \cdot 2^{-10}}{2^{-10} + (1 - 2^{-10}) \cdot 2^{-10}} = \frac{1 - 2^{-10}}{1 + 1 - 2^{-10}} \approx \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4.4

1. Stufe: Münze (WW, WZ, ZZ)

2. Stufe: Oberseite (W, Z)

$$P(WW|W) = \frac{P(WW, W)}{P(W)}$$

$$= \frac{P(WW)P(W|WW)}{P(WW)P(W|WW) + P(WZ)P(W|WZ) + P(ZZ)P(W|WZ)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{2}} = \frac{2}{2 + 1 + 0} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 4.5

E: Apparat ist einwandfrei

O: Apparat ist in Ordnung;

$P(E) = 0.95$

(a) $P(E \cap O) = 0.95 \cdot 0.75 = 0.7125$

(b) $P(O) = P(E)P(O|E) + P(\neg E)P(O|\neg E)$

$$= 0.95 \cdot 0.75 + 0.05 \cdot 0.02 = 0.7135$$

(c) $P(E|O) = \dfrac{P(E)P(O|E)}{P(O)} = \dfrac{0.95 \cdot 0.75}{0.7135} = 0.9986$

Aufgabe 4.6

$$P(K|R) = \frac{P(K,R)}{P(R)} = \frac{P(R) \cdot P(K|R)}{P(R) \cdot P(K|R) + P(\overline{R}) \cdot P(K|\overline{R})}$$

$$= \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.2}$$

$$= \frac{9}{17} \approx 0.529$$

Aufgabe 4.7

1. Stufe: Karte (BB, RR, RB)
2. Stufe: sichtbare Seite (b, r)

$$P(RB|r) = \frac{P(RB, r)}{P(r)}$$

$$= \frac{P(RB)P(r|RB)}{P(BB)P(r|BB) + P(RR)P(r|RR) + P(RB)P(r|RB)}$$

$$= \frac{1/4 \cdot 1/2}{1/4 \cdot 1/2 + 2/4 \cdot 2/2 + 1/4 \cdot 0/2}$$

$$= \frac{1/8}{5/8} = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 4.8

E: Einbruch findet statt

A: Alarm geht los

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E) \cdot P(A|E)}{P(E) \cdot P(A|E) + P(\overline{E}) \cdot P(A|\overline{E})}$$

$$= \frac{0.0001 \cdot 0.999}{0.0001 \cdot 0.999 + 0.9999 \cdot 0.0005} \approx 0.167$$

Aufgabe 5.1

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),\ldots,(5,5)\}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- $P(A \cap B) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(5,5)\}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

A und B sind (stochastisch) abhängig.

Aufgabe 5.2

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $P(A \cap B) = P(\{(2,6),(6,2)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A und B sind (stochastisch) unabhängig.

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \frac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$
- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $P(A \cap B) = P(\{(3,4),(4,3)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

A und B sind (stochastisch) abhängig.

Aufgabe 5.4

Mit X bezeichnen wir die Anzahl „Zahl“ bei $n = 12$ Würfen mit einer fairen Münze. Die Wahrscheinlichkeit bei *einem* Münzwurf „Zahl“ zu würfeln, beträgt bei einem idealen Würfel $p = 0.5$; entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ $1 - p = 0.5$.

(a) $P(X = 0) = \binom{12}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{12} = 2.44 \cdot 10^{-4}$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.9998$

(c) $P(X = 12) = \binom{12}{12} \cdot 0.5^{12} \cdot 0.5^0 = 2.44 \cdot 10^{-4}$ (da $p = 1 - p$)

(d) $P(X = 2) = \binom{12}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^{10} = 0.0161$

(e) $P(X = 11) = \binom{12}{11} \cdot 0.5^{11} \cdot 0.5^1 = 0.00293$

(f) $P(X \geq 11) = \sum_{k=11}^{12} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.00317$

(g) $P(X \leq 6) = \sum_{k=0}^{6} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.613$

(h) $P(4 \leq X \leq 9) = \sum_{k=4}^{9} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k}$

$$= \sum_{k=0}^{9} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} - \sum_{k=0}^{3} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k}$$

$$= 0.908$$

Aufgabe 5.5

X: Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$$P_8(4 \leq X \leq 6) = \sum_{k=4}^{6} \binom{8}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} = 0.7170$$

TI-84+: sum(binompdf(8,2/3,{4,5,6}))

oder binomcdf(8,2/3,6)−binomcdf(8,2/3,3)

Aufgabe 5.6

X: Anzahl richtiger Antworten bei $n = 5$ Prüfungsfragen

$p = P(\textit{eine}$ Frage richtig zu beantworten$) = 1/3$

(a) $P(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = 0.132$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{211}{243} = 0.868$

(c) $P(X = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243} = 0.00412$

(d) $$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{11}{243} = 0.0453 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.7

X: Anzahl Reissnägel in Seitenlage

$$\begin{aligned} P_{10}(X > 3) &= 1 - P_{10}(X \leq 3) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{10-k} = 0.6177 \end{aligned}$$

TI-83+/TI-84+: 1−binomcdf(10,0.4,3)

Aufgabe 5.8

X: Anzahl Einladungen die am nächsten Tag zugestellt werden

X ist binomialverteilt mit $p = 0.9$

(a) $P(X = 8) = \binom{8}{8} 0.9^8 \cdot 0.1^0 = 0.4305$

(b) $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{x=1}^{5} P(X = x) = 0.9619$

Aufgabe 5.9

X: Anzahl Personen mit der bestimmten Eigenschaft

$$\begin{aligned}
P_n(X \geq 1) &\geq 0.9 \\
1 - P_n(X = 0) &\geq 0.9 \\
1 - 0.95^n &\geq 0.9 \\
0.1 &\geq 0.95^n \\
\ln 0.1 &\geq n \cdot \ln 0.95 \\
\ln 0.1 / \ln 0.95 &\leq n \\
44.89 &\leq n
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.10

$$\begin{aligned}
P(\text{Mindestens eine von } n \text{ Komponenten funktioniert}) &\geq 0.99 \\
1 - P(\text{Alle } n \text{ Komponenten versagen}) &\geq 0.99 \\
1 - 0.65n &\geq 0.99 \\
0.01 &\geq 0.65n \\
\ln 0.01 &\geq n \cdot \ln 0.65 \\
\ln 0.01 / \ln 0.65 &\leq n \\
10.69 &\leq n
\end{aligned}$$

Mindestens 11 Komponenten müssen parallel geschaltet werden.

Aufgabe 5.11

Die Münze wird zweimal nacheinander geworfen und die Entscheidung gemäss folgendem Aktionsplan gefällt:

1. Wurf	2. Wurf	Aktion
Wappen	Zahl	wähle Kino und beende den Versuch
Zahl	Wappen	wähle Theater und beende den Versuch
Zahl	Zahl	wiederhole den Versuch
Wappen	Wappen	wiederhole den Versuch

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

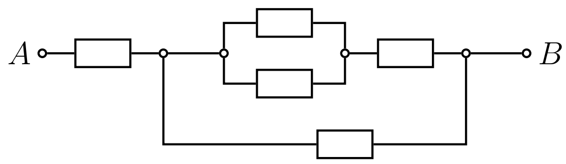
- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(\text{Theater}|A_k) = \dfrac{(1-p)p}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$

und es gilt:

$$\begin{aligned}
P(\text{Kino}) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Kino}|A_k) P(A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot P(A_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_k) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

da $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_k) = 1$, wenn $P(\text{Wappen}) > 0$ und $P(\text{Zahl}) > 0$.

Aufgabe 5.12



- innere Parallelschaltung:

  $p_1 = 1 - (1-p)^2 = 1 - (1 - 2p + p^2) = 2p - p^2$

- innere Serieschaltung:

  $p_2 = p_1 \cdot p = 2p^2 - p^3$

- äussere Parallelschaltung:

  $$\begin{aligned} p_3 &= 1 - (1-p_2)(1-p) = 1 - (1 - p - p_2 + pp_2) \\ &= p + p_2 - pp_2 = p + 2p^2 - p^3 - (2p^3 - p^4) \\ &= p + 2p^2 - 3p^3 + p^4 \end{aligned}$$

- äussere Serieschaltung (Gesamtsystem):

  $p_4 = p \cdot p3 = p(p + 2p^2 - 3p^3 + p^4) = p^2 + 2p^3 - 3p^4 + p^5$

Aufgabe 5.13

(a) $P(A) = 0.99^8 = 0.923$

(b) $P(B) = 0.99^6 \cdot 0.01^2 = 9.41 \cdot 10^{-5}$

(c) $P(C) = \binom{8}{5} \cdot 0.99^5 \cdot 0.01^3 = 5.33 \cdot 10^{-5}$

(d) $P(D) = \sum_{k=7}^{8} = \binom{8}{k} \cdot 0.99^k \cdot 0.01^{8-k} = 0.997$

(e) $P(\text{Sequenz wird richtig übertragen}) = 0.99^8 = 0.923$

X: Anzahl richtig übertragener Sequenzen

$$P_{24}(X \geq 20) = \sum_{k=20}^{24} = \binom{24}{k} \cdot 0.923^k \cdot 0.077^{24-k} = 0.966$$

Aufgabe 6.1

$6^5 = 7776$

Aufgabe 6.2

je einen Australier und eine Beligierin:	60 Möglichkeiten
je eine Belgierin und einen Chinesen:	72 Möglichkeiten
je einen Chinesen und einen Australier:	30 Möglichkeiten
Insgesamt (Summenregel)	162 Möglichkeiten

Aufgabe 6.3

Wir verteilen die Farben von links nach rechts:

- Links: eine von 6 Farben
- Mitte: eine von 5 Farben, denn zwei nebeneinander liegende Streifen dürfen nicht dieselbe Farbe haben.
- Rechts: eine von 5 Farben, denn die Farbe vom mittleren Feld darf nicht wieder verwendet werden; hingegen ist die Farbe vom Feld links wieder erlaubt.

Produktregel: $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ Möglichkeiten.

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Einer der übrigen 10 Spieler spielt gegen einen von 9 Gegnern.

$\Rightarrow$ 9 Möglichkeiten für die zweite Paarung.

...

Einer der übrigen 4 Spieler spielt gegen einen von 3 Gegnern.

$\Rightarrow$ 3 Möglichkeiten für die fünfte Paarung.

Es bleiben noch zwei Spieler und somit eine Paarung übrig.

Produktregel: $11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10\,395$ Paarungen

Aufgabe 6.5

(a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

(b) 4

(c) $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7)/6! = 924$

(d) $2^7 = 128$

Aufgabe 6.6

$7! = 5040$

Aufgabe 6.7

(a) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher verschieden sind?

$(5 + 3 + 7)! = 15! = 1.308 \cdot 10^{13}$

(b) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher der gleichen Art nebeneinander stehen sollen?

$5! \cdot 3! \cdot 7! \cdot 3! = 21\,772\,800$

Aufgabe 6.8

$8!/(2! \cdot 2!) = 10\,080$

Aufgabe 6.9

(a) $10! = 3\,628\,800$

(b) $5! \cdot 5! = 14\,400$

(c) Für die 5 Paare als Ganzes gibt es 5! Möglichkeiten, das Drehkreuz zu passieren.

Bei jedem Paar gibt es, unabhängig von jedem anderen Paar $2! = 2$ Reihenfolgen (Frau oder Mann zuerst).

Produkteregel: $5! \cdot (2!)^5 = 3\,840$ Möglichkeiten

Aufgabe 6.10

$7!/(4! \cdot 2!) = 105$

Aufgabe 6.11

(a) 10^6 Möglichkeiten

(b) $10^6 \cdot 5 : 60 : 60 : 24 \approx 58\,\text{Tage}$

Aufgabe 6.12

Für die 1. Murmel hat er 2 Unterbringungsmöglichkeiten

Für die 2. Murmel hat er 2 Unterbringungsmöglichkeiten

...

Für die 8. Murmel hat er 2 Unterbringungsmöglichkeiten

Produktregel: $2^8 = 256$ Möglichkeiten

alternative Lösung als Auswahlproblem:

Aus den 8 Kugeln werden die Murmeln ausgewählt, die in die, sagen wir, linke Tasche kommen. Die Murmeln der rechten Tasche sind dadurch eindeutig bestimmt.

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7}$$
$$= 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1$$
$$= 256$$

Aufgabe 6.13

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (n-elementige Menge)

Menge aller Teilmengen von A (Potenzmenge)
$\mathcal{P}(A) = \{T \colon T \subset A\}$

$B = \big\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \colon x_i \in \{0, 1\}\big\}$

Ordne jeder Teilmenge $T \in \mathcal{P}(A)$ wie folgt ein n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zu:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_i \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist bijektiv – zu jedem n-Tupel in B gibt es genau eine Teilmenge $T \in \mathcal{P}(A)$ und umgekehrt.

Wegen $|\mathcal{P}(A)| = |B|$ und $|B| = 2^n$ gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Aufgabe 6.14

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 10!/3! = 604\,800$

Aufgabe 6.15

(a) $12!/(12 - 5)! = 95\,040$

(b) $12!/(12 - 11)! = 479\,001\,600$

(c) $12! = 479\,001\,600$

Aufgabe 6.16

(a) $\displaystyle\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143 - 143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

(b) $\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17-16)!} = \frac{17!}{16! \cdot 1!} = \frac{17!}{16!} = 17$

(c) $\binom{101}{99} = \binom{101}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2 \cdot 1} = 101 \cdot 50 = 5050$

Aufgabe 6.17

Kombinationen ohne Wiederholung: $\binom{11}{4} = 330$

Aufgabe 6.18

Zuerst wählt man 4 Personen für den ersten Tisch aus. Damit sind automatisch auch die Personen bestimmt, die am zweiten Tisch Platz nehmen müssen. Insgesamt:

$\binom{7}{4} = 35$

Aufgabe 6.19

$\binom{10}{6} \cdot \binom{5}{3} = 2100$

Aufgabe 6.20

(a) Eine Gerade ist durch zwei Punkte definiert. Die (maximale) Anzahl der Geraden entspricht daher der Anzahl Möglichkeiten, zwei Punkte aus 45 Punkten auszuwählen:

$\binom{45}{2} = 990$

(Wenn jeweils mehr als zwei Punkte auf einer Geraden liegen, dann gibt es natürlich weniger Fälle)

(b) Ein Kreis ist durch drei Punkte definiert. Die (maximale) Anzahl der Kreise entspricht daher der Anzahl Möglichkeiten, drei Punkte aus 45 Punkten auszuwählen:

$\binom{45}{3} = 14\,190$

Aufgabe 6.21

(a) Wie oft geht man z. B. nach rechts?

$\binom{16}{8} = 12\,870$

(b) $\binom{7}{3} \cdot \binom{9}{5} = 4410$

Aufgabe 6.22

Es gibt zwei richtige Resultate:

- Für das 1. Team wählt man 5 aus 10 Personen aus:

  $\binom{10}{5} = 252.$

  Damit sind die übrigen 5 Personen im zweiten Team

  Wenn wir also zwischen einer ersten und einer zweiten Mannschaft unterscheiden, dann ergibt es 252 Möglichkeiten.

- Wenn wir nicht zwischen einer ersten und einer zweiten Mannschaft unterscheiden, so wurde oben jede Aufteilung doppelt gezählt; also gibt es in diesem Fall nur 126 Möglichkeiten.

Aufgabe 6.23

$$\begin{aligned}
\binom{x}{2} &= 190 \\
\frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} &= 190 \\
x^2 - x &= 380 \\
x^2 - x - 380 &= 0 \\
x &= 20 \\
x &= -19 \quad \text{Unsinn}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.24

Zuerst jedem Kind je ein Tafel geben, erst dann die restlichen 9 Tafeln verteilen:

$1 \cdot \binom{9+2}{2} = 55$

Aufgabe 6.25

Die gesamte Torzahl jeder Mannschaft wird durch die zwei Pausen in drei Torgruppen aufgeteilt. Zum Beispiel so:

Heimmannschaft:	`TT|TTT|TTT`
Gäste:	`TTT||TT`

Da jedes Ergebnis der einen Mannschaft mit jedem Ergebnis der Anderen Mannschaft „kombiniert“ werden kann, erhalten wir folgende Anzahl möglicher Zwischenresultate:

$\binom{8+2}{2} \cdot \binom{5+2}{2} = 945$

Aufgabe 6.26

Es handelt sich um Kombinationen mit Wiederholungen (theoretisch wäre auch ein Einparteiensystem möglich).

$$\binom{54+3}{3} = 29\,260$$

Aufgabe 6.27

Jede der 37 Ecken kann mit $37 - 3 = 34$ anderen Ecken verbunden werden, denn die Ecke selbst und ihre beiden Nachbarn kommen als Diagonalendpunkte nicht in Frage. Dabei wird jede Diagonale doppelt gezählt. Also gibt es $37 \cdot 34/2 = 629$ Diagonalen.

Eine andere Lösung ist die: Man bestimmt zunächst alle möglichen Verbindungssstrecken zwischen den 37 Punkten:

$$\binom{37}{2} = 666.$$

Darunter sind auch die Strecken benachbarter Punkte, welche gerade die 37 Seiten des 37-Ecks sind. Also $666 - 37 = 629$ Diagonalen.

Allgemein: $\dfrac{n(n-3)}{2}$ oder $\dbinom{n}{2} - n$

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{8}{3} + \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} + \binom{10}{3} \cdot \binom{8}{1} = 560 + 1260 + 960 = 2780$$

Subtraktive Lösung:

$$\binom{18}{4} - \binom{10}{0} \cdot \binom{8}{4} - \binom{10}{4} \cdot \binom{8}{0} = 3060 - 70 - 210 = 2780$$

Aufgabe 6.29

(a) Auf $15! \approx 1.31 \cdot 10^{12}$ Arten

Wegen der Nummern spielen die Farben hier keine Rolle.

(b) André, Brigitte und Christian: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 5!/2! = 60$

Die restlichen 12 Schüler: $12!$ Möglichkeiten

Produktregel: $60 \cdot 12! = 28\,740\,096\,000$ Möglichkeiten.

Aufgabe 6.30

(a) Zuerst werden 6 Schüler für die roten T-Shirts ausgewählt, dann 5 Schüler für die blauen T-Shirts und die übrigen bekommen die gelben:

$$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4} = 630\,630$$

oder mit Multinomialkoeffizient: $\dfrac{15!}{6! \cdot 5! \cdot 4!} = 630\,630$

(b) André, Brigitte und Christian erhalten blaue T-Shirts und da diese nicht unterscheidbar sind, geht dies auf genau eine Weise. Die übrigen 12 Schüler erhalten noch 6 rote, 2 blaue und und 4 gelbe T-Shirts:

$$\binom{12}{6} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 13\,860$$

oder mit Multinomialkoeffizient: $\dfrac{12!}{6! \cdot 2! \cdot 4!} = 13\,860$

Aufgabe 6.31

Häufigkeiten der Buchstaben:

A	N	T	E	R
3	1	3	4	2

Permutationen mit Wiederholungen: $\dfrac{13!}{3! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!} = 3\,603\,600$

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten

(b) Die Schokolade muss dreimal gebrochen werden:

$\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten

(c) Die Schokolade muss 1–5 mal gebrochen werden:

$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 31$ Möglichkeiten

subtraktive Lösung: $2^5 - \binom{5}{0} = 32 - 1 = 31$

Aufgabe 6.33

Die gleichzeitige Ankunft ist unwesentlich; wir können die Autos auch nacheinander ankommen und so die Parkplätze wählen lassen. Es handelt sich jeweils um Variationen ohne Wiederholungen.

(a) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

(b) $6! = 720$

(c) $8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 = 20\,160$

Aufgabe 6.34

(a) Produktregel:

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \approx 2.15 \cdot 10^{19} \text{ Möglichkeiten.}$$

(b) Es sind weniger, denn wie bei (a) berechnen wir:

$$\binom{36}{12} \cdot \binom{24}{12} \cdot \binom{12}{12} \approx 3.385 \cdot 10^{15}$$

(c) Hat A vier Nell und D vier Bauern, so sind noch 28 Karten zu verteilen. Produktregel:

$$\binom{28}{5} \cdot \binom{23}{9} \cdot \binom{14}{9} \approx 1.61 \cdot 10^{14} \text{ Möglichkeiten.}$$

Aufgabe 6.35

Fahrerin:	$2! = 2$ Sitzverteilungen
übrige Mitfahrende:	$4! = 24$ Sitzverteilungen
Insgesamt	$2 \cdot 4! = 48$ Sitzverteilungen

Aufgabe 6.36

(a) Aus 12 Fragen 8 auswählen: $\binom{12}{8} = 495$

(b) Aus den ersten 4 Fragen 4 wählen und aus den verbleibenden 8 Fragen weitere 4 wählen: $\binom{4}{4} \cdot \binom{8}{4} = 70$

(c) Aus den ersten 7 Fragen 4 wählen und aus den verbleibenden 5 Fragen weitere 4 wählen: $\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{4} = 175$

(d) Genau 4 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{4} = 175$

Genau 5 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{5} \cdot \binom{5}{3} = 210$

Genau 6 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{6} \cdot \binom{5}{2} = 70$

Genau 7 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{7} \cdot \binom{5}{1} = 5$

Mit der Summenregel ergibt das 460 Möglichkeiten

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

(b) Anzahl Verteilungen 1. Gondel: $\binom{17}{6} = 12\,376$

Anzahl Verteilungen 2. Gondel: $\binom{11}{4} = 4 = 330$

Anzahl Verteilungen 3. Gondel: $\binom{7}{7} = 1$

Produktregel: 4 084 080 Verteilungen.

(c)

N. und R. in der 1. Gondel:	$\binom{15}{4} \cdot \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{7}$	450 450
N. und R. in der 2. Gondel:	$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{7}$	180 180
N. und R. in der 3. Gondel:	$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$	630 630
Insgesamt		1 261 260

Aufgabe 7.1

X: Die Summe der Augenzahlen bei dreimaligem Würfeln

(a) $$\begin{aligned} P(X = 6) &= 3 \cdot P(1,1,4) + 6 \cdot P(1,2,3) + P(2,2,2) \\ &= \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{1}{216} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108} \end{aligned}$$

(b) $P(X > 18) = 0$

(c) $$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= P(1,1,1) + 3P(1,1,2) \\ &= \frac{1}{216} + \frac{3}{216} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2

(a) $P(X = 2) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_4\}) = 0.1 + 0.3 = 0.4$

(b) $P(X > 4) = P(\{\omega_3\}) = 0.2$

(c) $$\begin{aligned} P(X^2 < 5) &= P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_4\}) + P(\{\omega_5\}) \\ &= 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.3

(a) $P(X=4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296}$

(b)
$$\begin{aligned} P(X \leq 7) &= P(1) + P(2) + \cdots + P(7) \\ &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{6} \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \tfrac{1}{6} \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^6 \\ &= \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7}{1 - \frac{5}{6}} = 0.7209 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} P(X > 9) &= 1 - P(X \leq 9) \\ &= 1 - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^9}{1 - \frac{5}{6}} = 0.1938 \quad \text{SJ17/18: 0.1615} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.4

(a) $P(X=4) = \binom{8}{4} \cdot 0.48^4 \cdot 0.52^4 = 0.2717$

(b) $P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{8}{k} \cdot 0.48^k \cdot 0.52^{8-k} = 0.4078$

(c)
$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{8}{k} \cdot 0.48^k \cdot 0.52^{8-k} = 0.1198 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.5

(a) $P(X=4) = \dfrac{\binom{20}{4}\binom{10}{3}}{\binom{30}{7}} = \dfrac{323}{1131}$

(b) $P(X=8) = 0$

(c)
$$\begin{aligned} P(X < 3) &= \frac{\binom{20}{0}\binom{10}{7}}{\binom{30}{7}} + \frac{\binom{20}{1}\binom{10}{6}}{\binom{30}{7}} + \frac{\binom{20}{2}\binom{10}{5}}{\binom{30}{7}} \\ &= \frac{1}{39} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.6

Poisson-Parameter für 30 Minuten: $\lambda = 18$

Poisson-Parameter für 10 Minuten: $\lambda = 6$

(a) $P(X = 5) = \dfrac{\mathrm{e}^{-6} \cdot 6^5}{5!} = 0.1606$

(b) $P(X \leq 5) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{\mathrm{e}^{-6} \cdot 6^k}{k!} = 0.4457$

(c) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 0.5543$

(d) $P(X = 0) = \dfrac{\mathrm{e}^{-6} \cdot 6^0}{0!} = 0.002479$

Aufgabe 7.7

(a) $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

$\mathrm{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 36 \cdot \frac{2}{5} = 15$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 15 - 9 = 6$

(b) $\mathrm{E}(Y) = 2 \cdot \frac{9}{25} + 7 \cdot \frac{12}{25} + 12 \cdot \frac{4}{25} = 6$

$\mathrm{E}(Y^2) = 4 \cdot \frac{9}{25} + 49 \cdot \frac{12}{25} + 144 \cdot \frac{4}{25} = 48$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2 = 48 - 36 = 12$

(c) $\mathrm{E}(Z) = 2 \cdot \frac{6}{20} + 7 \cdot \frac{12}{20} + 12 \cdot \frac{2}{20} = 6$

$\mathrm{E}(Z^2) = 4 \cdot \frac{6}{20} + 49 \cdot \frac{12}{20} + 144 \cdot \frac{2}{20} = 45$

$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)^2 = 45 - 36 = 9$

Aufgabe 7.8

$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 0.6$
$\mathrm{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0.6 + 0^2 \cdot 0.4 = 0.6$
$\mathrm{Var}(X) = 0.6 - 0.6^2 = 0.24$

Aufgabe 7.9

X: Gesamtgewinn

- Frage 1 zuerst:

x	0	100	300
$p(X=x)$	0.2	$0.8 \cdot 0.5$	$0.8 \cdot 0.5$

$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.4 + 300 \cdot 0.4 = 160$

- Frage 2 zuerst:

x	0	200	300
$p(X=x)$	0.5	$0.5 \cdot 0.2$	$0.5 \cdot 0.8$

$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0.5 + 200 \cdot 0.1 + 300 \cdot 0.4 = 140$

Man sollte mit Frage 1 beginnen.

Aufgabe 7.10

- $c = 0.1$
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0.5 \\ 1 \cdot 0.4 + a \cdot 0.2 + b \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 &= 0.5 \\ 0.2a + 0.3b &= 0.1 \\ a &= 0.5 - 1.5b \end{aligned}$$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\ \mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\ 0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\ 0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \\ 2a^2 + 3b^2 &= 11 \\ 2(0.5 - 1.5b)^2 + 3b^2 &= 11 \\ 4.5b^2 - 3b + 0.5 + 3b^2 &= 11 \\ 7.5b^2 - 3b - 10.5 &= 0 \\ b_1 &= -1 \\ b_2 &= 1.4 \end{aligned}$$

$a_1 = 0.5 - 1.5b_1 = 2$

$a_2 = 0.5 - 1.5b_2 = -1.6$

Aufgabe 7.11

(a) X: Gewinn in CHF

$X = x_i$	$p_i = P(X = x_i)$
20	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$
2	$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{216}$
1	$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{27}{216}$

(b) $E(X) = \dfrac{1}{216} \cdot 20 + \dfrac{8}{216} \cdot 2 + \dfrac{27}{216} \cdot 1 = \dfrac{7}{24}$

Das Spiel ist bei einem Einsatz von 0.2917 Franken fair.

Aufgabe 7.12

(a) $\mathrm{E}(X) = 0.2 \cdot (-2) + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 = 1.7$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_x p_X(x)\big(x - \mathrm{E}(X)\big)^2 \\ &= 0.2 \cdot (-2 - 1.7)^2 + 0.1 \cdot (1 - 1.7)^2 + \dots \\ &= 4.41\end{aligned}$$

Alternative: mit

$\mathrm{E}(X^2) = 0.2 \cdot 4 + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 4 + 0.3 \cdot 16 = 7.3$

erhält man:

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 7.3 - 1.7^2 = 4.41$

und damit $\sigma(X) = 2.1$

(b) Analog wie bei (a) rechnen oder einfacher die Formel für eine *lineare* Funktion von Zufallsvariablen anwenden:

$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X + 1) = 2\mathrm{E}(X) + 1 = 2 \cdot 1.7 + 1 = 4.4$

Ebenso bei der Varianz: $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X + 1) = 2^2\mathrm{Var}(X) = 4 \cdot 4.41 = 17.64$

$\sigma(X) = \sqrt{2^2\mathrm{Var}(X)} = 2 \cdot 2.1 = 4.2$

(c) $\mathrm{E}(Z) = 7.3$

$\mathrm{Var}(Z) = \dots = 33.21;$

$\sigma(Z) = \dots = 5.763$

Aufgabe 7.13

Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \quad \text{Indexverschiebung: } k \to k+1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)p(1-p)^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{k} \\
&= 0 \cdot p(1-p)^0 + \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \\
&= (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} + 1 = (1-p)\mathrm{E}(X) + 1
\end{aligned}$$

Auflösen nach $\mathrm{E}(X)$ ergibt $\mathrm{E}(X) = 1/p$

Also: $\mathrm{E}(X) = 1/p = 1/(1/6) = 6$

Aufgabe 7.14

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= np &&= 8 \\
\mathrm{Var}(X) &= np(1-p) &&= 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8(1-p) &= 6 \\
(1-p) &= 3/4 \\
p &= 1/4 \\
n &= 32
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.15

$\mathrm{E}(X) = \lambda = 10$ Pakete/Minute

$\mathrm{Var}(X) = \lambda = 10$ Pakete/Minute

Aufgabe 8.1

(a) Für $h = 0.5$ hat die Fläche unter dem Graphen den Inhalt 1.

(b) $P(4 \leq X \leq 5) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 8.2

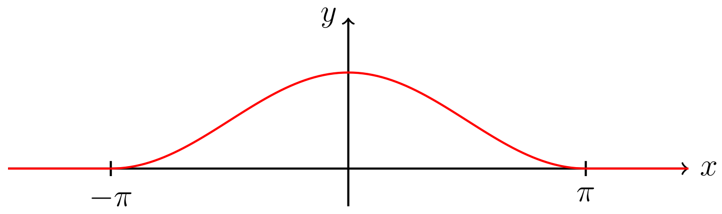
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) = \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} \int_0^1 x \cdot 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

($*$) Da die Dichtefunktion ausserhalb des Intervalls $[0, 1]$ überall den Wert Null hat, können wir uns bei der Integration auf diesen Bereich beschränken.

Aufgabe 8.3

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1) & \text{falls } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



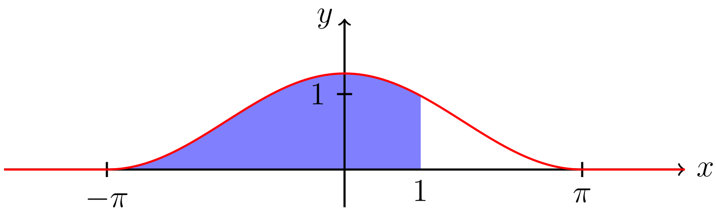
Aufgabe 8.3

(b)
$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \big[\sin x + x\big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \big[(0+\pi) - (0-\pi)\big] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Also ist f eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

Aufgabe 8.3

(c) Graph:



$$
\begin{aligned}
P(X \leq 1) &= \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(b)}{=} \frac{1}{2\pi}\big[\sin x + x\big]_{-\pi}^{1} \\
&= 0.7931
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78) = \displaystyle\int_{78}^{\infty} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.8413$

(b) $P(78 \leq X \leq 82) = \displaystyle\int_{78}^{82} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.6827$

(c) $P(78 \leq X \leq 82) = \displaystyle\int_{78}^{82} \varphi_{80,4}(x)\mathrm{d}x = 0.3829$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$P(X \leq 100) = \displaystyle\int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.0228$

(b) $P(X \geq 130) = \displaystyle\int_{130}^{\infty} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.1587$

Y: Anzahl Personen mit mehr als 130 Punkten
(binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0.1587$)

$P(Y \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{20} = 0.9684$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \displaystyle\int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) = \displaystyle\int_{15}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.6915$

(c) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h

Y ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0.6915$ aus (b)

$P_5(Y = 5) = p^5 = 0.1581$

(d) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h

Y ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0.6915$ aus (c)

$$\sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{10-k} \quad = 0.9981$$

$1 -$ binomcdf(10,0.6915,*2*)

Stochastik (Kapitel 9) Lösungen+ Übungen

Aufgabe 9.1

$p = P(\text{eine Person kann das alkoholfreie Bier identifizieren})$

$p_0 = 0.5$

H_0: Das alkoholfreie Bier kann geschmacklich nicht indentifiziert werden. ($p = p_0$)

H_1: Das alkoholfreie Bier kann geschmacklich identifiziert werden. ($p > p_0$)

$x = 98$, $n = 150$

$z = 3.7559$

p-Wert $= 0.8639 \cdot 10^{-5}$

Entscheidung: H_0 verwerfen

Der Anteil der Personen, die das alkoholfreie Bier geschmacklich indentifizieren können ist signifikant höher als 0.5.

Aufgabe 9.2

H_0: Die Anteile der Schülerinnen und Schüler, die rezyklierte Kleider tragen würden, unterscheiden sich nicht. ($p_1 = p_2$)

H_1: Der Anteil der Schülerinnen, die rezyklierte Kleider tragen würden, ist kleiner als der entsprechende Anteil der Schüler. ($p_1 < p_2$)

$x_1 = 35$, $n_1 = 63$

$x_2 = 30$, $n_2 = 46$

$z = -1.015$

p-Wert $= 0.1550$

Entscheidung: H_0 beibehalten

Der Anteil der Schülerinnen, die rezyklierte Kleider tragen würden, ist nicht signifikant kleiner als der entsprechende Anteil bei den Schülern.

Aufgabe 9.3

H_0 Die Anzahl der Verkehrsunfälle im Kanton Schaffhausen ist gleichmässig auf die Wochentage verteilt.

H_1 Es gibt Wochentage, an denen Verkehrsunfälle im Kanton Schaffhausen häufiger bzw. seltener auftreten als an anderen.

Wochentag	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
beobachtet	80	99	78	89	82	79	53
erwartet	80	80	80	80	80	80	80

$\alpha = 0.05$

$\mathrm{df} = 6$

$\chi^2 = 14.75$

$p = 0.02229$

Entscheidung: H_0 verwerfen

Aufgabe 9.4

Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

$\tilde{x}$: unbekannter Median der Grundgesamtheit

$\tilde{x}_0 = 25$

- H_0: $\tilde{x} = 25$
- H_1: $\tilde{x} > 25$

$\tilde{x}_0$	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
x_i	25	34	5	20	50	44	18	39	29	19
$\mathrm{sig}(x_i - \tilde{x}_0)$		$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\lvert x_i - \tilde{x}_0\rvert$		9	20	5	25	19	7	14	4	6
Rang		5	8	2	9	7	4	6	1	3

Rangsumme $r_+ = 5 + 9 + 7 + 6 + 1 = 29$

Rangsumme $r_- = 8 + 2 + 4 + 3 = 17$

Kontrolle: $9(9 + 1)/2 = 45$ (ok)

$r_{0.05}(n) = 8$ und $n(n + 1)/2 - r_{0.05(n)} = 45 - 8 = 37$ [Tabelle]

Verwerfungsbereich: $V = \{0, \ldots, 8, 37, \ldots, 45\}$

$r_+ \notin V$ (und damit auch $r_- \notin V$)

Entscheidung: H_0 beibehalten

Die mittlere Anzahl gerauchter Zigaretten ist nicht signifkant höher als 25.

Aufgabe 9.5

Hypothesen:

- H_1 Die Integration ist bei Pflegeeltern mit eigenen Kindern besser als bei Pflegeeltern ohne Kinder.
- H_0 Die Integration ist bei Pflegeeltern mit eigenen Kindern gleich gut wie bei Pflegeeltern ohne Kinder.

H_0 beibehalten, da $6.05\% > 5\%$.

H_0: Die Integration ist bei Pflegeeltern mit eigenen Kindern gleich gut wie bei Pflegeeltern ohne Kinder. ($\alpha = 5\%$)

Aufgabe 9.6

Wilcoxon-Rangsummentest:

$\tilde{x}$ Hautwiderstand bei Tag

$\tilde{y}$ Hautwiderstand bei Nacht

- H_0: $\tilde{x} = \tilde{y}$
- H_1: $\tilde{y} > \tilde{y}$

x_i	Rang	y_i	Rang
24	7	20	3
28	10	25	8
21	4	15	1
27	9	22	5
23	6	18	2
r_x:	36	r_y	19

Kontrolle $10 \cdot (10-1)/2 = 45$ (ok)

untere Grenze: $n_1(n_1+1)/2 + w_{0.05}(n_1, n_2) = 5(5+1)/2 + 4 = 19$

obere Grenze: $n_1 n_2 + n_1(n_1+1)/2 - w_{0.05}(n_1, n_2) = 25 + 5(5+1)/2 - 4 = 36$

Verwerfungsbereich: $V = \{0, \ldots, 19, 36, \ldots, 45\}$

$r_x \in V$ (und damit auch $r_y \in V$)

Entscheidung: H_0 verwerfen

Der Hautwiderstand sinkt nachts ab. ($\alpha = 5\%$)

Aufgabe 9.7

μ: unbekannter Mittelwert des neuen Messgeräts

$\mu_0 = 10\,\mathrm{ml}$

H_0 Das neue Messgerät misst im Mittel ein Flüssigkeitsvolumen von 10 ml. ($\mu = \mu_0$)

H_1 Das neue Messgerät misst im Mittel ein anderes Flüssigkeitsvolumen als 10 ml. ($\mu \neq \mu_0$)

$\{10.77, 9.98, 9.92, 10.66, 10.30, 10.36, 10.44, 10.31, 9.91\} \to L_1$

$t = 2.843$

$p = 0.02172$

Entscheidung: H_0 verwerfen

Die vom neuen Messgerät gemessene Flüssigkeitsmenge unterscheidet sich signifikant von 10 `ml`.

Aufgabe 9.8

μ_A: mittleres Gewicht der Brötchen von Bächerei A

μ_B: mittleres Gewicht der Brötchen von Bächerei B

H_0 Die mittleren Gewichte der Brötchen der beiden Bäckereien unterscheiden sich nicht. ($\mu_A = \mu_B$)

H_1 Die mittleren Gewichte der Brötchen der beiden Bäckereien unterscheiden sich. ($\mu_A \neq \mu_B$)

Bäckerei A: $\{34, 32, 40, 32, 34\} \to$ $\mathtt{L}_1$

Bäckerei B: $\{42, 43, 41, 37, 33\} \to$ $\mathtt{L}_2$

Für die Berechnung des Standardfehlers des Mittelwertunterschieds sollte man sicherheitshalber annehmen, dass die Varianzen der beiden Stichproben verschieden sind und in die Berechnung des p-Werts einfliessen (Korrektur von Welch). In diesem Fall sollte man beim TI-84 Plus die Option `pooled`=No wählen.

Kann man annehmen, dass die Varianzen in beiden Stichproben identisch sind, führt auch die Option `pooled`=Yes zum gleichen Ergebnis.

Hinweis: Um zu testen, ob sich zwei Varianzen unterscheiden, kann auf dem TI-84 Plus der F-Test verwendet werden.

$t = -2.0284$

$p = 0.07890$

Entscheidung: H_0 beibehalten.

Die mittleren Gewichte der Brötchen der beiden Bäckereien unterscheiden sich nicht systematisch.

Bemerkungen: (a) mit der Standardvariante des t-Tests erhält man nur geringfügig andere Werte (b) Bei der Ausgabe des Testresultats taucht die Grösse df (degrees of freedom) auf. Sie wird intern berechnet und dient dazu, für kleine Stichprobenwerte die richtige t-Verteilung zu erhalten.

Aufgabe 9.9

t-Test für gepaarte Stichproben

H_0 Das Medikament hat keinen systematischen Einfluss auf die Konzentrationsleistung ($\mu_2 - \mu_1 = 0$)

H_1 Das Medikament verbessert systematisch die Konzentrationsleistung. ($\mu_2 - \mu_1 > 0$)

$\{108, 99, 100, 100, 98\} \rightarrow \texttt{L}_1$

$\{107, 100, 100, 102, 101\} \rightarrow \texttt{L}_2$

$\texttt{L}_2 - \texttt{L}_1 \rightarrow \texttt{L}_3$

$t = 1.414$

$p = 0.1151$

Entscheidung: H_0 beibehalten

Das Medikament hat keinen signifikanten Einfluss auf die Konzentrationsleistung.