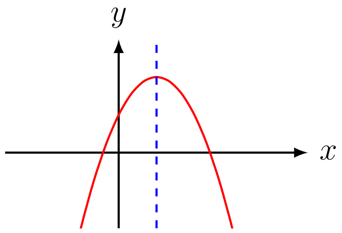
Aufgabe A.1



(a) Scheitelpunktsform: $f(x) = a(x-1)^2 + 2$

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{2}) &= 0 \\ a\big(1+\sqrt{2}-1\big)^2 + 2 &= 0 \\ a \cdot 2 + 2 &= 0 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) = -(x-1)^2 + 2 = -x^2 + 2x - 1 + 2 = -x^2 + 2x + 1$

f lässt sich auch mit dem Ansatz $y = ax^2 + bx + c$ bestimmen, wenn man den Scheitelpunkt und die beiden zu $x = 1$ symmetrischen Nullstellen einsetzt.

(b) Anstelle von

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \big(2 - (x-1)^2\big)\,\mathrm{d}x$$

kann die um $x \to x+1$ verschobene Kurve intergriert werden:

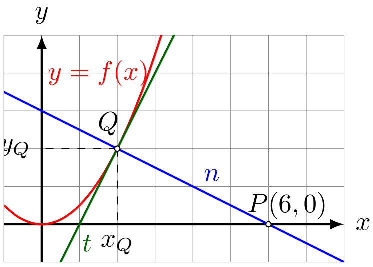
$$\begin{aligned} &\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \big(2 - x^2\big)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\sqrt{2}} \big(2 - x^2\big)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe A.2

Lösung als Extremwertaufgabe:

- Zielfunktion: $d^2(x,y) = (x-6)^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2$
- Nebenbedingung: $y = 0.5x^2$
- NB in die ZF einsetzen: $d(x) = x^2 - 12x + 36 + 0.25x^4$
- Ableitungen: $d'(x) = x^3 + 2x - 12$
  $d''(x) = 3x^2 + 2$
- Extremstellen:
  $$\begin{aligned} d''(x) &= 0 \\ x^3 + 2x - 12 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$
  Test: $d''(2) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ ist eine Minimalstelle
- Übrige Grössen: $y = 0.5 \cdot 2^2 = 2 \Rightarrow P(2,2)$

Lösung mit einer Kurvennormalen:



Für den kürzesten Abstand muss die Strecke von $P(6,0)$ zum gesuchten Punkt $Q(x,y)$ senkrecht zur Kurve stehen.

Steigung der Normalen: $m_1 = -\dfrac{1}{f'(x)} = -\dfrac{1}{x}$

Steigung der Graden PQ: $m_2 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_Q - 0}{x_Q - 6} = \dfrac{0.5x_Q^2}{x_Q - 6}$

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 \\ -\frac{1}{x} &= \frac{0.5x^2}{x-6} \\ -(x-6) &= 0.5x^3 \\ 0.5x^3 + x - 6 &= 0 \\ x_1 &= 2 \quad \Rightarrow \quad Q(2,2) \end{aligned}$$

(Die übrigen Lösungen sind komplex.)

Aufgabe A.3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$T(0,0) \in G_f$: $f(0) = 0$ $\qquad d = 0$

$H(4,4) \in G_f$: $f(4) = 4$ $\qquad 64a + 16b + 4c + d = 4$

$T(0,0)$ ist Extrempunkt: $f'(0) = 0$ $\qquad c = 0$

$H(4,0)$ ist Extrempunkt: $f'(4) = 0$ $\qquad 48a + 8b + c = 0$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 - \int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= 4\pi - \left[-\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3\right]_0^4 = 4\pi - 8$$

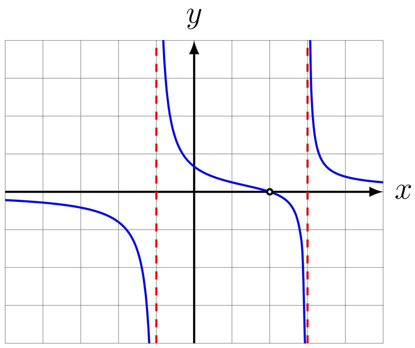
Aufgabe A.4

$$f(x) = \frac{x-2}{(x-3)(x+1)}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Vertikale Asymptoten: $x = -1$ und $x = 3$ (mit Vorzeichenwechsel!)

Nullstelle: $x = 2$

Ordinatenabschnitt $y_0 = f(0) = \dfrac{0-2}{(0-3)(0+1)} = \dfrac{2}{3}$



(a) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x-2}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$x - 2 = A(x+1) + B(x-3)$$

$$x - 2 = (A+B)x + (A-3B)$$

$$\begin{array}{rcl} A + B = 1 & \Rightarrow & A = 1/4 \\ A - 3B = -2 & & B = 3/4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x-2}{(x-3)(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\big[\ln|x-3|\big]_0^2 + \frac{3}{4}\big[\ln|x+1|\big]_0^2 \\ &= \frac{1}{4}\big(\ln(1) - \ln(3)\big) + \frac{3}{4}\big(\ln(3) - \ln(1)\big) \\ &= -\frac{1}{4}\ln(3) + \frac{3}{4}\ln(3) = \frac{1}{2}\ln(3) \end{aligned}$$

Aufgabe A.5

Variante 1: Partielle Integration

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \underbrace{-\cos x}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) \mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \int 1 \,\mathrm{d}x - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$2\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x + 2C$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$$

Variante 2: Produktregel der Trigonometrie

$$\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+x) - \cos(x-x)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

Was wegen $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ dasselbe wie oben ist.

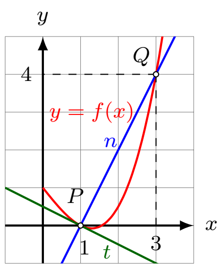
Aufgabe A.6

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

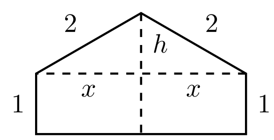
$f''(x) = 6ax + 2b$

- $P(1,0) \in G_f$: $f(1) = 0$ $\qquad a + b + c + d = 0$
- $P(3,4) \in G_f$: $f(3) = 4$ $\qquad 27a + 9b + 3c + d = 4$
- WeP $\in y$-Achse: $x_W = 0$ und $f''(0) = 0$ $\qquad 2b = 0$
- $m_n = -\dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{4-0}{3-1} = 2$ $\qquad 3a + 2b + c = -\dfrac{1}{2}$



$$\left|\begin{array}{r} a + b + c + d = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = 4 \\ 2b = 0 \\ 6a + 4b + 2c = -1 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x + 1$$

Aufgabe A.7



- *Zielfunktion:* $A(x,h) = 2x \cdot 1 + x \cdot h$
- *Nebenbedingung:* $x^2 + h^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{4-x^2}$
- *NB in ZF einsetzen:* $A(x) = 2x + x\sqrt{4-x^2}$
- *Extrema bestimmen:*

$$A'(x) = 2 + \sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x)$$
$$= 2 + \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 2 + \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= 2 + \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2\sqrt{4-x^2}+4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ 2\sqrt{4-x^2}+4-2x^2 &= 0 \\ \sqrt{4-x^2} &= x^2-2 \\ 4-x^2 &= x^4-4x^2+4 \\ x^4-3x^2 &= 0 \\ x^2(x^2-3) &= 0 \\ x &= \sqrt{3} \quad \text{(geometrisch sinvoll)} \end{aligned}$$

- *Maximaleigenschaft testen:* (optional; nur für Hartgesottene)

$$A'(x) = 2 + (4-2x^2)(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$A''(x) = (-4x)(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} + (4-2x^2)\left(-\tfrac{1}{2}\right)(4-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$$
$$= -4x\,(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x(4-2x^2)(4-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$A''\left(\sqrt{3}\right) = -4\sqrt{3}\cdot 1 + \sqrt{3}\cdot(-2)\cdot 1 = -6\sqrt{3} < 0$$

- *Resultat:* Die Breite muss $2\sqrt{3}$ Längeneinheiten betragen.

Aufgabe A.8

(a) Polynomdivision:

$$(x^3 + 2x^2 + 3x + 3) : (x + 1) = x^2 + x + 2 + \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln|x+1| + C\end{aligned}$$

(b) $$\int \tan x \cdot \ln\big(\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \ln\big(\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x = \dots$$

Substitution: $u = \ln\cos x$

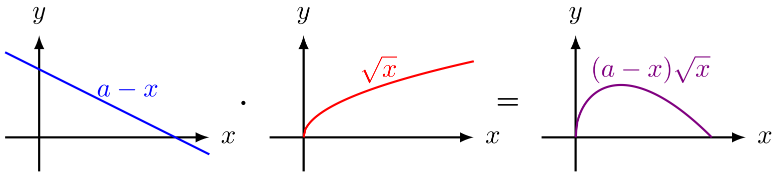
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}\dots &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot u \cdot \frac{-\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\big(\ln\cos x\big)^2 + C\end{aligned}$$

Aufgabe A.9

Skizze ohne grafikfähigen Taschenrechner:



Nullstellen (allgemein): $x_1 = 0$, $x_2 = a$

$$\begin{aligned}
\pi \int_0^a \left[(a-x)\sqrt{x}\,\right]^2 \mathrm{d}x &= \pi \int_0^a (a-x)^2\, x \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^a a^2x - 2ax^2 + x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^a \\
&= \pi \left(\frac{1}{2}a^4 - \frac{2}{3}a^4 + \frac{1}{4}a^4\right) \\
&= \frac{\pi}{12}a^4
\end{aligned}$$

Aus dem Vergleich $\frac{\pi}{12}a^4 = \frac{4\pi}{3}$ folgt $a^4 = 16$ und daraus $a = 2$.

Aufgabe A.10

(a) *f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn ...*

- $f(x_0)$ existiert,
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert (unabhängig von der Folge $x \to x_0$),
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

anschaulich: *Der Graph kann an der Stelle x_0 ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden.*

f ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn ...

der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(unabhängig von der Folge $h \to 0$) existiert.

anschaulich: *Der Graph hat an der Stelle x_0 keinen Knick.*

(b) Stetigkeit:

$$f(1) = \tfrac{1}{4}(3 + 4a - 3) = a$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \tfrac{1}{4}(3 + 4a - 3) = a$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = a\sqrt{1} = a$$

f ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x = 1$ stetig, da $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = a$.

Differenzierbarkeit: Da die Funktionsterme links und rechts von $x = 1$ differenzierbar sind, genügt es, dass die Ableitungen an beiden Seiten (im Grenzwert) übereinstimmen:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}ax^{-\frac{3}{2}} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{3}{2}$$

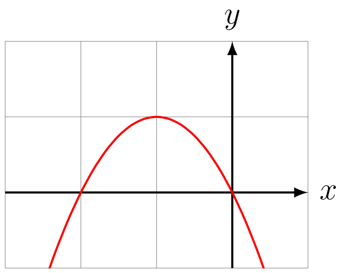
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\tfrac{1}{2}ax^{-\frac{3}{2}}\right) = \tfrac{1}{2}a$$

Die geforderte Übereinstimmung erhält man für $a = 3$.

Aufgabe A.11

(a) $a = 2$: $f_2(x) = -x^2 - 2x = x(2 + x)$

nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x = -2$ und $x = 0$



(b) Nullstellen (allgemein):
$$
\begin{aligned}
(1-a)x^2 - ax &= 0 \\
x[(1-a)x - a] &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
(1-a)x - a &= 0 \\
x_2 &= a/(1-a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(a) &= \int_{a/(1-a)}^{0} \big((1-a)x^2 - ax\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}(1-a)x^3 - \frac{1}{2}ax^2\right]_{a/(1-a)}^{0} \\
&= 0 - \left(\frac{1}{3}\frac{(1-a)a^3}{(1-a)^3} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{(1-a)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{a^3}{(1-a)^2} - \frac{1}{3}\frac{a^2}{(1-a)^2} = \frac{1}{6}\frac{a^3}{(1-a)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A'(x) &= 0 \\
\frac{1}{6}\cdot\frac{3a^2(1-a)^2 - a^3\cdot 2(1-a)\cdot(-1)}{(1-a)^4} &= 0 \quad \| \cdot 6(1-a)^4 \\
3a^2(1-a)^2 + 2a^3(1-a) &= 0 \quad \| \; a \neq 0 \\
3(1-a)^2 + 2a(1-a) &= 0 \\
(1-a)\big(3(1-a) + 2a\big) &= 0 \\
(1-a)(3-a) &= 0
\end{aligned}
$$

$a_1 = 1$ entfällt wegen $a > 1$

$a_2 = 3$

Aufgabe S.1

(a) Es sind $\binom{49}{2} = \frac{49 \cdot 48}{2 \cdot 1} = 1176$ Strecken.

(b) Es kommen nur horizontale und vertikale Strecken in Frage. Pro Reihe bzw. Kolonne sind es jeweils 3 Strecken.

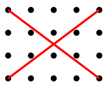
Da das Gitterquadrat 7 Reihen und 7 Kolonnen hat, sind es $7 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 42$ Strecken.

(c) Bei der Streckenlänge 5 sind neben den horizontalen und vertikalen Strecken wegen des Satzes von Pythagoras ($3^2 + 4^2 = 5^2$) auch „schiefe" Strecken möglich.

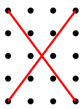
Pro Reihe/Kolonne sind je 2 Strecken möglich: 28 Strecken

 und

Strecken mit der Steigung $\pm\frac{3}{4}$: 24 Strecken



Strecken mit der Steigung $\pm\frac{4}{3}$: 24 Strecken



Insgesamt: 76 Strecken

Aufgabe S.2

(a) Der Motor springt ...

beim 1. Versuch an:	p
beim 2. Versuch an:	$(1-p)p$
spätestens beim 2. Versuch an:	$p+(1-p)p=0.64$

quadratsiche Gleichung: $p^2-2p+0.64=0$

$D=b^2-4ac=4-4\cdot 1\cdot 0.64=4-2.56=1.44$

$p_1=\dfrac{2+\sqrt{1.44}}{2}=\dfrac{2+1.2}{2}=1.6$

$p_2=\dfrac{2-\sqrt{1.44}}{2}=\dfrac{2-1.2}{2}=0.4$

sinnvolle Lösung der Gleichung: $p=0.4$

(b) Der Motor springt ...

beim 1. Versuch an:	p	0.4
beim 2. Versuch an:	$(1-p)p$	0.24
beim 3. Versuch an:	$(1-p)^2p$	0.144
spätestens beim 3. Versuch an:		0.784

(c) X: Nummer des Versuchs, bei dem der Motor anspringt

$$P(X\le n)=p+(1-p)p+\cdots+(1-p)^{n-1}p$$

geometrische Reihe mit $a_1=p=0.4$ und $q=(1-p)=0.6$.
Damit können wir die Bedingung in der Aufgabe als Ungleichung formulieren:

$$\begin{aligned}
0.4+0.6\cdot 0.4+0.6^2\cdot 0.4+\cdots+0.6^{n-1}\cdot 0.4 &\ge 0.98\\
0.4\cdot\frac{1-0.6^n}{1-0.6} &\ge 0.98\\
1-0.6^n &\ge 0.98\\
0.02 &\ge 0.6^n\\
\lg 0.02 &\ge n\cdot\lg 0.6\\
\lg 0.02/\lg 0.6 &\le n\\
7.66 &\le n
\end{aligned}$$

Es sind mindestens 8 Versuche nötig.

Aufgabe S.3

(a) *Verteilung* der Zufallsgrösse X:

a	2	4	5
$P(X=a)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

$E(X) = \frac{3}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{2}{6} \cdot 5 = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

$E(X^2) = \frac{3}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 16 + \frac{2}{6} \cdot 25 = \frac{78}{6}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{78}{6} - \frac{100}{9} = \frac{234}{18} - \frac{200}{18} = \frac{34}{18} = \frac{17}{9}$

(b) 7 oder mehr Punkte nach genau 2 Würfen:

$P(25, 52, 45, 54, 44, 55)$
$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{46} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

7 oder mehr Punkte nach genau 3 Würfen:

$P(224, 225, 242, 244, 245, 422, 424, 425)$
$= \frac{9}{216} + \frac{18}{216} + \frac{9}{216} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{9}{216} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216}$
$= \frac{63}{216} = \frac{7}{24}$

7 oder mehr Punkte nach genau 4 Würfen:

$P(2222, 2224, 2225) = \frac{81}{1296} + \frac{27}{1296} + \frac{54}{1296} = \frac{162}{1296} = \frac{1}{8}$

a (Anzahl Würfe)	2	3	4
$P(X=a)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{8}$

Aufgabe S.4

K: Person leidet an der Krankheit

$\overline{K}$: Person leidet nicht an der Krankheit

T: Test ist positiv

$\overline{T}$: Test ist negativ

$P(K) = 0.1 \qquad P(T|K) = 0.8$

$P(\overline{K}) = 0.9 \qquad P(T|\overline{K}) = 0.3$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(K) \cdot P(T|K) + P(\overline{K}) \cdot P(T|\overline{K}) \\ &= 0.1 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.3 = 0.08 + 0.27 = 0.35 \end{aligned}$$

Bayes: $P(K|T) = \dfrac{P(K) \cdot P(T|K)}{P(T)} = \dfrac{0.1 \cdot 0.8}{0.35} = \dfrac{0.08}{0.35} = \dfrac{8}{35}$

Aufgabe S.5

(a) Da der Fahrer einen festen Platz hat, sind nur 7 Personen auf 11 Plätzen anzuordnen. Das ergibt $11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 5 = 1\,663\,200$ Möglichkeiten.

(b) Der 1. Snack kann auf einen der 7 Mitreisenden verteilt werden Der 2. Snack kann auf einen der 7 Mitreisenden verteilt werden ... Der 10. Snack kann auf einen der 7 Mitreisenden verteilt werden

Also sind es $7^{10} = 282\,475\,249$ Möglichkeiten.

(c) Es müssen 4 Personen aus einer Menge von 8 Personen ausgewählt werden:

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

Nun sind es noch 3 Personen aus einer Menge von 7 Personen ausgewählt werden:

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

(d) Die 3 Kinder können auf $3! = 6$ Arten auf der letzten Bankreihe Platz nehmen. Die übrigen 4 Personen können auf $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ Arten auf den verbleibenden 8 Plätzen sitzen. Nach der Produkteregel ergibt das $6 \cdot 1680 = 10\,080$ Möglichkeiten.

Aufgabe S.6

(a) $P(\text{alle in verschiedenen Stockwerken}) = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \dfrac{5}{18}$

(b) $P(\text{alle im gleichen Stockwerk}) = \dfrac{6}{6^4} = \dfrac{1}{216}$

(c) $1 - P(\text{keine zwei im gleichen Stockwerk}) = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \dfrac{13}{18}$

Aufgabe S.7

(a) Verteilung des Gewinns X (aus Spielersicht):

Gewinn g	2	1	-3
$P(X=g)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-3) = 1 = \frac{1}{4}$

(b) Das Spiel ist aus der Sicht des Spielers vorteilhaft, da $\mathrm{E}(X) > 0$

(c) $E(X^2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot (-3)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$

$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{15}{4} - \frac{1}{16} = \frac{59}{16}$

$\sigma = \sqrt{59}/4$

Aufgabe S.8

f ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte, wenn gilt:

(1) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

Ob (1) erfüllt ist, stellt sich erst nach dem Lösen der Aufgabe heraus.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 1 \\
\int_{0}^{2} (mx+q)\,\mathrm{d}x &= 1 \\
\left[\tfrac{1}{2}mx^2 + qx\right]_0^2 &= 1 \\
2m + 2q &= 1 \quad (3) \\
\mathrm{E}(X) &= \tfrac{5}{6} \\
\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{5}{6} \\
\int_{0}^{2} x(mx+q)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{5}{6} \\
\left[\tfrac{1}{3}mx^3 + \tfrac{1}{2}qx^2\right]_0^2 &= \tfrac{5}{6} \\
\tfrac{8}{3}m + 2q &= \tfrac{5}{6} \\
16m + 12q &= 5 \quad (4)
\end{aligned}
$$

Subtrahiere das Sechsfache/Achtfache von (3) von (4):

$$
\begin{aligned}
4m &= -1 \quad \Rightarrow \quad m = -\tfrac{1}{4} \\
-4q &= -3 \quad \Rightarrow \quad q = \tfrac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ (ist nichtnegativ für $x \in [0, 2]$)

Aufgabe D.1

Behauptung: 23 teilt $(5^{2n} - 2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $(*)$

Beweis durch vollständige Induktion:

- Induktionsverankerung $(n = 0)$:

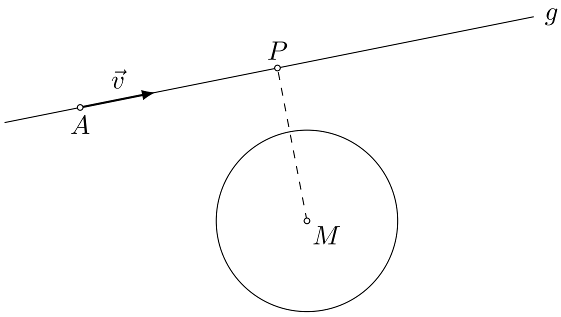
  $5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ ist durch 23 teilbar (ok)

- Induktionsschritt:
  - Induktionsvoraussetzung (IV): $(*)$ sei wahr für $n \geq 0$
  - $n \to n + 1$:

    $$\begin{aligned} 5^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 5^{2n+2} - 2^{n+1} = 5^2 \cdot 5^{2n} - 2^1 \cdot 2^n \\ &= 25 \cdot 5^{2n} + 0 - 2 \cdot 2^n \\ &= 25 \cdot 5^{2n} - 25 \cdot 2^n + 25 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n \\ &= 25\big(5^{2n} - 2^n\big) + 23 \cdot 2^n \end{aligned}$$

    Der Klammerterm ist nach IV durch 23 teilbar und der Summand danach wegen des Faktors 23. Also teilt 23 auch die Summe. □

Aufgabe V.1



Ebene senkrecht zu g durch M:

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon\colon x+z-3=0$$

$\varepsilon \cap g$:

$$\begin{aligned}1(0+t)+0(7+0t)+1(9+t)-3&=0\\ t+9+t-3&=0\\ 2t+6&=0\\ t&=-3\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad P(-3,7,6)$

$$|\overrightarrow{PM}| = \left|\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\7\\6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+4+16}=6$$

Abstand von der Sphäre: $|\overrightarrow{PM}|-r=6-2=4$

Aufgabe V.2

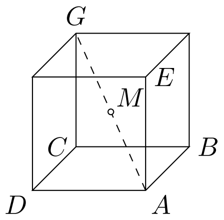
(a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8 + 8 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \overrightarrow{AD} = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$$

$$\vec{r}_A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r}_C$$

(b) Skizze:



$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6\overrightarrow{AE}$$

$$\vec{r}_G = \vec{r}_C + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_M = \tfrac{1}{2}\left[\vec{r}_A + \vec{r}_G\right] = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M(1, 5, -1)$$

$$r = \left|\overrightarrow{AB}\right|/2 = 3 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 9$$

Aufgabe V.3

Mittelpunktsform von K_3:

$$\begin{aligned} x^2 - 12x + (36 - 36) + y^2 - 2y + (1 - 1) + z^2 + 33 &= 0 \\ (x-6)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 - 4 &= 0 \\ (x-6)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 &= 2^2 \end{aligned}$$

- K_1 und K_2:

  $M_1(5, 3, -2)$, $r_1 = 1$;

  $M_2(3, 7, 2)$, $r_2 = 7$

  $\overline{M_1M_2} = \left|(-2, 4, 4)^\mathsf{T}\right| = \sqrt{36} = 6$

  K_1 und K_2 berühren sich innen, denn $|r_1 - r_2| = 6 = \overline{M_1M_2}$

- K_2 und K_3:

  $M_2(3, 7, 2)$, $r_2 = 7$

  $M_3(6, 1, 0)$, $r_3 = 2$

  $\overline{M_2M_3} = \left|(3, -6, 2)^\mathsf{T}\right| = \sqrt{49} = 7$

  K_2 und K_3 schneiden sich, denn $|r_2 - r_3| = 5 < \overline{M_2M_3} = 7 < 9 = |r_2 + r_3|$

- K_3 und K_1:

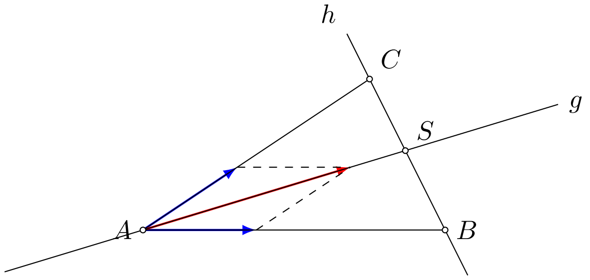
  $M_3(6, 1, 0)$, $r_3 = 2$;

  $M_1(5, 3, -2)$, $r_1 = 1$

  $\overline{M_3M_1} = \left|(-1, 2, -2)^\mathsf{T}\right| = \sqrt{9} = 3$

  K_3 und K_1 berühren sich aussen, denn $r_3 + r_1 = 3 = \overline{M_3M_1}$

Aufgabe V.4



$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wegen $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$ ist

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden von α.

$$w\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$w \cap h$:

$$\begin{aligned} 7 - s &= 1 + 4t \\ 3 + s &= 1 + 4t \\ 6 &= 9 - 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= 1 \\ s &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad S(5, 5, 6)$$

Aufgabe V.5

(a) $z = 3 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -3 \quad \Rightarrow \quad S_1(6, -12, 0)$

(b) Lösung mit Projektionsformel:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zerlegung von $\overrightarrow{AP}$ in eine Komponente parallel zum Richtungsvektor $\vec{v}$ und eine senkrecht zu $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{AP}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = 3\vec{v} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$F(0, 12, 6)$

Aufgabe V.6

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(g,h) &= \frac{\left|\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} \\ &= \frac{|-2+9+42|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{49}{7} = 7 \end{aligned}$$

Aufgabe V.7

- Hessesche Normalform:

  $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

  $$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4\vec{n}$$

  $$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = -12$$

  $\varepsilon\colon 2x - y + 2z - 12 = 0$

  $$\mathrm{dist}(S, \varepsilon) = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + 2 \cdot 9 - 12}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

- Volumenformel des Spats (bzw. Tetraeders):

  $$V_{\text{Spat}} = \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \vec{AS} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 16 - 12 + 16 = -12$$

  $$V_{\text{Spat}} = G \cdot h = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \cdot h = 12h$$

  $$V = 12h = -12 \Rightarrow h = 1$$