Aufgabe A.1

Eine Parabel hat den Scheitelpunkt $S(1,2)$ und eine Nullstelle $x = 1 + \sqrt{2}$.

(a) Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

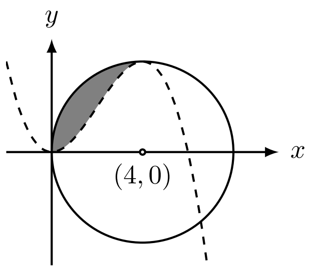
(b) Wie gross ist das von der Parabel und der x-Achse eingeschlossene Flächenstück?

Aufgabe A.2

Welcher Punkt Q auf der Parabel $y = 0.5x^2$ hat den kürzesten Abstand vom Punkt $P(6,0)$?

Aufgabe A.3

Berechne den Inhalt der hervorgehobenen Fläche. Die Polynomfunktion ist von kleinstmöglicher Ordnung.



Aufgabe A.4

Gegeben: $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-3)(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

(a) Skizziere den Graphen G_f von f.

(b) Berechne den Inhalt der endlichen Fläche, der von G_f und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

Aufgabe A.5

Berechne $\displaystyle\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$ auf zwei verschiedene Arten.

Hinweis: Verwende bei einer Variante die Beziehung

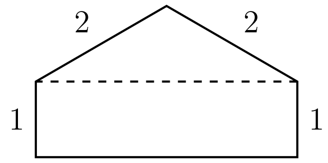
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{1}{2}\big[\cos(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\big]$$

Aufgabe A.6

Der Wendepunkt einer Parabel 3. Ordnung liegt auf der y-Achse. Die Kurvennormale in $P(1, 0)$ schneidet die Parabel nochmals im Punkt $Q(3, 4)$. Bestimme die Gleichung dieser Parabel.

Aufgabe A.7

Einem Rechteck der Höhe 1 wird ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkellängen 2 aufgesetzt (siehe Bild).



Wie breit muss das Rechteck sein, damit der Flächeninhalt der ganzen Figur maximal wird? (Die Maximaleigenschaft muss nicht nachgewiesen werden.)

Aufgabe A.8

Berechne die unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x + 1}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \tan x \cdot \ln\big(\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe A.9

Das zwischen den Schnittpunkten mit der x-Achse liegende Stück der Kurve

$$k\colon\ y = (a - x)\sqrt{x}, \quad a > 0$$

erzeugt durch Rotation um die x-Achse die Oberfläche eines Körpers. Für welches a hat der Rotationskörper das Volumen $\frac{4\pi}{3}$?

Aufgabe A.10

(a) Erkläre die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion.

(b) Für welche Werte a ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ stetig und differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(3x^2 + 4a - 3) & \text{für } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Aufgabe A.11

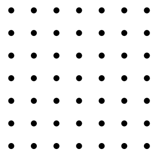
Gegeben: Parabel mit der Gleichung $y = (1 - a)x^2 - ax$ $(a > 1)$

(a) Skizziere die Parabel für $a = 2$.

(b) Für welchen Wert von a wird die Fläche zwischen Parabel und x-Achse minimal?

Aufgabe S.1

49 Punkte sind in einem quadratischen Gitter der Seitenlänge 6 angeordnet. Zwei zufällig ausgewählte Punkte sind die Endunkte einer Strecke.



Wie viele Strecken

(a) gibt es insgesamt?

(b) haben die Länge 4?

(c) haben die Länge 5?

Aufgabe S.2

Der Motor eines alten Autos springt bei jedem Versuch mit der Wahrscheinlichkeit p an, unabhängig von der Anzahl der Versuche. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Motor spätestens beim zweiten Versuch anspringt, beträgt 0.64.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit springt der Motor bereits beim ersten Versuch an?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit springt der Motor spätestens beim dritten Versuch an?

(c) Wie viele Startversuche braucht es mindestens, damit der Motor mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% anspringt?

Aufgabe S.3

Ein idealer Spielwürfel wird neu beschriftet und trägt nun neu auf seinen Seitenflächen die Augenzahlen 2, 2, 2, 4, 5, 5.

(a) Die Zufallsgrösse X bezeichne die beim einmaligen Werfen geworfene Augenzahl. Bestimme Verteilung, Erwartungswert und Standardabweichung von X.

(b) Der Würfel wird so lange geworfen, bis die Augensumme mindestens 7 beträgt. Die Zufallsgrösse Y sei nun die Anzahl der benötigten Würfe. Bestimme die Verteilung von Y.

Hinweis: Die Aufgabe ist viel zu aufwändig für eine mündliche Matura; eine gute Übung zum Abzählen ist sie trotzdem.

Aufgabe S.4

In einer Bevölkerung leiden durchschnittlich 10% aller Personen an einer Erbkrankheit. Ist eine Person Trägerin dieser Erbkrankheit, so zeigt ein medizinischer Test in 80% aller Fälle die Erkrankung an. Unglücklicherweise zeigt der Test auch bei 30% der gesunden Personen irrtümlich die Erkrankung an.

Wir betrachten eine zufällig gewählte Person, die auf den Test positiv reagiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie Trägerin der Erbkrankheit?

Aufgabe S.5

Acht Personen P_1, P_2, ..., P_8 reisen in einem Kleinbus, der Platz für einen Fahrer und 11 Passagiere bietet. Person P_1 sitzt am Steuer.

(a) Die Zuteilung der Passagiersitze wird durch das Los bestimmt. Wie viele Sitzordnungen sind möglich?

(b) Person P_2 verlost während einer Rast 10 verschiedene Snacks unter den 7 Mitreisenden. Auf wie viele Arten können die Snacks verteilt werden, wenn eine Person auch mehrere oder gar alle Snacks erhalten kann?

(c) An der Grenze werden 4 der 8 Personen zur Kontrolle gebeten. Auf wie viele Arten kann die Auswahl geschehen?

Wie viele Arten sind möglich, wenn der Fahrer P_1 sicher in der Auswahl ist?

(d) Im Ausland gelten besondere Bestimmungen: Die drei Kinder P_6 und P_7 und P_8 müssen in der hintersten Bankreihe (mit 3 Plätzen) sitzen. Wie lautet nun die Antwort auf die Frage (a)?

Aufgabe S.6

In einem Aufzug, der noch 6 Stockwerke fährt, sind 4 Personen, die unabhängig voneinander aussteigen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) alle in verschiedenen Stockwerken

(b) alle im gleichen Stockwerk

(c) mindestens zwei im gleichen Stockwerk aussteigen?

Aufgabe S.7

Ein Spieler wirft zwei faire Münzen. Der Spieler gewinnt CHF 2.–, wenn zweimal „Wappen“ erscheinen und CHF 1.–, wenn einmal „Wappen“ erscheint. Der Spieler verliert CHF 3.–, wenn keine der Münzen „Wappen“ anzeigt.

(a) Berechne den Erwartungswert des Gewinns aus der Sicht des Spielers.

(b) Ist das Spiel für den Spieler

- vorteilhaft,
- unvorteilhaft,
- fair?

Begründe die Antwort.

(b) Bestimme die Standardabweichung des Gewinns aus der Sicht des Spielers.

Aufgabe S.8

Eine stetige Zufallsvariable X hat eine Dichte der Form

$$f(x) = \begin{cases} mx + q & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimme die Parameter m und q, wenn $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{6}$ gelten soll.

Aufgabe D.1

Beweise, dass

$$5^{2n} - 2^n$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ ohne Rest durch 23 teilbar ist.

Aufgabe V.1

Welcher Punkt der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat von der Sphäre

$$K\colon (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 4$$

den kleinsten Abstand und wie gross ist dieser?

Aufgabe V.2

Gegeben: $A(0,0,0)$, $B(2,4,4)$, $C(6,6,0)$, $D(4,2,-4)$

(a) Zeige, dass $ABCD$ ein Quadrat ist.

(b) Das Quadrat in (a) lässt sich auf zwei Arten durch vier Punkte zu einem Würfel ergänzen. Gib eine Gleichung der Inkugel von einem dieser beiden Würfel an.

Aufgabe V.3

Untersuche die gegenseitig Lage der drei Sphären.

- $K_1\colon (x-5)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=1$
- $K_2\colon (x-3)^2+(y-7)^2+(z-2)^2=49$
- $K_3\colon x^2+y^2+z^2-12x-2y+33=0$

Aufgabe V.4

Gegeben: Dreieck mit den Ecken $A(7,3,6)$, $B(1,1,9)$, $C(9,9,3)$.
In welchem Punkt schneidet die Winkelhalbierende von α die gegenüberliegende Seite?

Aufgabe V.5

Gegeben sind der Punkt $P(5,13,7)$ und die Gerade

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme den ...

(a) ersten Spurpunkt von g.

(b) Punkt F auf g, der am nächsten beim Punkt P liegt.

Aufgabe V.6

Berechne den Abstand der windschiefen Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe V.7

Gegeben ist das Tetraeder mit der Grundfläche $A(3,8,7)$, $B(5,4,3)$ und $C(1,8,9)$ sowie der Spitze $S(1,5,9)$. Berechne die Höhe h des Tetraeders von der Spitze S zur Grundfläche auf zwei verschiedene Arten.