1 Mengenlehre

Aufgabe 1.1

$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 6, 8\}$

Aufgabe 1.2

$A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 6, 8\} = \{2, 3\}$

Aufgabe 1.3

$A \setminus B = \{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 6, 8\} = \{1\}$

Aufgabe 1.4

$B \setminus A = \{2, 3, 6, 8\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{6, 8\}$

Aufgabe 1.5

$A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{2, 5\} = \{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}$

Aufgabe 1.6

$|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C| = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

Aufgabe 1.7

$\mathcal{P}(A) = \{\{\}, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}, \{4, 7\}, \{2, 4, 7\}\}$

Aufgabe 1.8

$\big|\mathcal{P}(A)\big| = 2^{|A|} = 2^7 = 128$

2 Funktionen

Aufgabe 2.1

Eine Funktion (oder Abbildung) ist eine Vorschrift, die jedem Element x (dem *Argument*) aus einer Menge X (dem *Definitionsbereich*) genau ein Element y (dem *Wert*) einer Menge Y (dem *Wertebereich*) zuordnet.

Aufgabe 2.2

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heisst injektiv, wenn für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq x_2$ folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$.

anschaulich: Jedes $y \in Y$ wird höchstens einmal von einem x „getroffen“.

Aufgabe 2.3

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heisst surjektiv, wenn für alle $y \in X$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$ gilt.

anschaulich: Jedes $y \in Y$ wird mindestens einmal von einem x „getroffen“.

Aufgabe 2.4

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heisst bijektiv, wenn sie injektiv *und* surjektiv ist.

anschaulich: Jedes $y \in Y$ wird genau einmal von einem x „getroffen“.

Aufgabe 2.5

$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$

Aufgabe 2.6

- Vertausche x und y in der Funktionsgleichung $y = f(x)$.
- Löse diese Gleichung nach y auf.

oder umgekehrt:

- Löse die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auf.
- Vertausche x und y.

Aufgabe 2.7

- Vertausche x und y: $x = \dfrac{2}{y-1}$
- Löse nach y auf: $y - 1 = \dfrac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}\colon y = \dfrac{2}{x} + 1$

3 Zahlbereiche

Aufgabe 3.1

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_{\nvdash} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation

Aufgabe 3.2

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$
abgeschlossen bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation

Aufgabe 3.3

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$
abgeschlossen bezüglich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

Aufgabe 3.4

$\mathbb{R} = \{x \colon x \text{ hat eine abbrechende oder nichtabbrechende Dezimaldarstellung}\}$
abgeschlossen bezüglich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

Aufgabe 3.5

$\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}\, y \colon x, y \in \mathbb{R}\}$ wobei i die Zahl ist mit $\mathrm{i}^2 = -1$

4 Potenzen

Aufgabe 4.1

$c = \sqrt[a]{b}$

a: Basis
b: Exponent
c: Potenz

Aufgabe 4.2

$17^7 \cdot 17^{-5} = 17^{7-5} = 17^2 = 289$

Aufgabe 4.3

$200^4 \cdot 5^4 = (200 \cdot 5)^4 = 1000^4 = 10^{12}$ (eine Billion)

Aufgabe 4.4

$2^8 : 2^{17} = 2^{8-17} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$

Aufgabe 4.5

$51^3 : 17^3 = (51 : 17)^3 = 3^3 = 27$

Aufgabe 4.6

$(-67)^0 = 1$

Aufgabe 4.7

0^0 ist nicht definiert.

Aufgabe 4.8

$(-1)^{-235} = \frac{1}{(-1)^{235}} = \frac{1}{-1} = -1$

Aufgabe 4.9

$0^{137} = 0$

Aufgabe 4.10

$2^{3^2} \stackrel{\text{Def.}}{=} 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

Aufgabe 4.11

$(2^3)^2 = 8^2 = 64$

Aufgabe 4.12

$2a^7 + 7a^7 - a^7 = 8a^7$

5 Wurzeln

Aufgabe 5.1

$c = \sqrt[a]{b}$

a: Wurzelexpeonent
b: Radikand
c: Wurzel

Aufgabe 5.2

$\sqrt[5]{32^6} = 32^{\frac{7}{5}} = (2^5)^{\frac{6}{5}} = 2^6 = 64.$

Aufgabe 5.3

$\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{144} = 12$
oder: $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{26} \cdot 2 = 12$

Aufgabe 5.4

$\sqrt{7} : \sqrt{63} = \sqrt{7 : 63} = \sqrt{1/9} = 1/3$

Aufgabe 5.5

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2} = 2^{\frac{1}{15}}$

Aufgabe 5.6

$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2^1 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

Aufgabe 5.7

$\sqrt[3]{27\,000\,000} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{10^6} = 3 \cdot 10^2 = 300$

Aufgabe 5.8

$$\begin{aligned}\sqrt{0.000121} &= \sqrt{1 \cdot 0.000121} = \sqrt{10^{-6} \cdot 10^6 \cdot 0.000121} \\ &= \sqrt{10^{-6} \cdot 121} = \sqrt{10^{-6}} \cdot \sqrt{121} = 10^{-3} \cdot 11 \\ &= 0.011\end{aligned}$$

6 Logarithmen

Aufgabe 6.1

$c = \log_a b$

a: Basis
b: Numerus
c: Logarithmus

Aufgabe 6.2

$\log_3 81 = 4$

Aufgabe 6.3

$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2$

Aufgabe 6.4

$\log_8 2 = \log_8 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

Aufgabe 6.5

$\log_{\sqrt{5}} 25\sqrt{5} = \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5}^5 = 5$

Aufgabe 6.6

$\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$

Aufgabe 6.7

$\log_2(-4)$ ist nicht definiert. (Numerus ≤ 0)

Aufgabe 6.8

$\log_2(128 \cdot 256) = \log 128 + \log 256 = 7 + 8 = 15$

Aufgabe 6.9

$\log_3(243 : \sqrt{27}) = \log_3 243 - \log_3 27^{\frac{1}{2}} = 5 - \frac{1}{2} \log_3 27 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

Aufgabe 6.10

$\log_2(52 : 13) = \log_2 4 = 2$

Aufgabe 6.11

$\ln \underset{=}{\sqrt[7]{\mathrm{e}}} \log_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{7}} = -\frac{1}{7}$

Aufgabe 6.12

$2 \log_a \sqrt{x} - \frac{1}{3} \log_a y^3 = \log_a x : \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

Aufgabe 6.13

$\lg(0.00001) = \log_{10} 10^{-4} = -4$

Aufgabe 6.14

$\mathrm{lb}(1024) = \log_2 2^{10} = 10$ (binärer Logarithmus)

Aufgabe 6.15

$\log_3 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$

Herleitung:
$$\begin{aligned} x &= \log_3 2 \\ 3^x &= 3^{\log_3 2} \\ 3^x &= 2 \\ \ln 3^x &= \ln 2 \\ x \ln 3 &= \ln 2 \\ x &= \ln 2 / \ln 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.16

$$9^{2\log_3 5} = \left(3^2\right)^{2\log_3 5} = 3^{4\log_3 5} = 3^{\log_3 5^4} = 5^4 = 625$$

Aufgabe 6.17

Führe bei allen Logarithmen einen Basiswechsel mit einer beliebigen Basis durch:

$$\begin{aligned} \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 9 &= \frac{\log_3 4}{\log_3 3} \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 5} \\ &= \frac{\log_3 9}{\log_3 3} = \frac{\log_3 3^2}{\log_3 3} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

7 Ausmultiplizieren

Aufgabe 7.1

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Aufgabe 7.2

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Aufgabe 7.3

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Aufgabe 7.4

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 0 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

oder: $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1;\quad \binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5;\quad \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Aufgabe 7.5

$$\begin{aligned}(2a-3b)^3 &= 8a^3 - 3\cdot 4a^2\cdot 3b + 3\cdot 2a^2\cdot 9b^2 - 27b^3\\ &= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 0 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1\end{array}$$

oder: $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1; \quad \binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5; \quad \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$

Aufgabe 7.6

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

8 Faktorisieren

Aufgabe 8.1

$$x^4+4x^3+3x^2 = x^2(x^2+4x+3) = x^2(x+1)(x+3)$$

Aufgabe 8.2

$$\begin{aligned}y^8-1 &= (y^4+1)(y^4-1)\\ &= (y^4+1)(y^2+1)(y^2-1)\\ &= (y^4+1)(y^2+1)(y+1)(y-1)\end{aligned}$$

Aufgabe 8.3

$$\begin{aligned}ac+ad+bc+bd+a+b &= a(c+d)+b(c+d)+a+b\\ &= (a+b)(c+d)+(a+b)\\ &= (a+b)(c+d+1)\end{aligned}$$

9 Polynome

Aufgabe 9.1

x		-14	14	-16	-7
13	1	-1	1	-3	-46

$f(13) = -46$

Aufgabe 9.2

Ein Polynom vom Grad 7 hat 8 Koeffizienten:

$p(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Aufgabe 9.3

x		-22	58	-68	35	-6
1	3	-19	39	-29	6	0
1	3	-16	23	-6	0	
1	3	-13	10	-4		
2	3	-10	3	0		
2	3	-4	-5			
3	3	-1	0			
$\frac{1}{3}$	3	0				

$p(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-\frac{1}{3})$

Aufgabe 9.4

```
                                                                   4x+1
 (x^4        - 3x^2 + 4x + 2):(x^2 + x - 1) = x^2 - x - 1 + -------
-(x^4 + x^3 -  x^2)                                         x^2+x+1
 -----------------
      -x^3 - 2x^2 + 4x + 2
    -(-x^3 -  x^2 +  x)
     -----------------
             -x^2 + 3x + 2
            -(x^2 -  x + 1)
             -------------
                    4x + 1
```

Aufgabe 9.5

Ansatz für unterschiedliche Linearfaktoren im Nenner:

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

$$5x+3 = A(x+3) + B(x-1)$$

$$5x+3 = Ax + Bx + 3A - B$$

$$5x+3 = (A+B)x + (3A-B)$$

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \quad (1) \\ 3A - B &= 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt $A = 2$ und $B = 3$

Also: $\dfrac{5x+3}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+3}$

Aufgabe 9.6

Ansatz für eine Potenz eines Linearfaktors im Nenner:

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$x^2+2x+3 = A(x^2-2x+1) + B(x-1) + C$$

$$x^2+2x+3 = Ax^2 - 2Ax + Bx + A - B - C$$

$$x^2+2x+3 = Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B-C)$$

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ -2A+B &= 2 \quad \Rightarrow B = 4 \\ A-B-C &= 3 \quad \Rightarrow C = 6 \end{aligned}$$

Also: $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)^3} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{4}{(x-3)^2} + \dfrac{6}{(x-3)^3}$

Aufgabe 9.7

Ansatz für irreduzible quadratische Nennerpolynome:

$$\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$x^2-1 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$$

$$x^2-1 = Ax^3 + Cx^3 + Bx^2 + Dx^2 + 2Ax + Cx + 2B + D$$

$$x^2-1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D)$$

$$\begin{array}{llll} A+C=0 & (1) & 2A+C=0 & (3) \\ B+D=1 & (2) & 2B+D=-1 & (4) \end{array}$$

Aus (1) und (3) folgt $A = C = 0$

Aus (2) und (4) folgt $B = -1$ und $D = 2$

Also: $\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \dfrac{-1}{x^2+1} + \dfrac{2}{x^2+2}$

Aufgabe 9.8

Fundamentalsatz der Algebra: *Jedes reelle (oder komplexe) Polynom vom Grad n hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.*

Aus dem Fundamentalsatz folgt, dass sich ein Polynom vom Grad n als Produkt von n Linearfaktoren $(x - x_i)$ mit $x_i \in \mathbb{C}$, $(i = 1, \ldots, n)$ zerlegen lässt.

Dies lässt sich so einsehen: Ist $f_n(x)$ ein Polynom vom Grad n, so hat $f_n(x)$ aufgrund des Fundamentalsatzes mindestens eine Nullstelle. Sei x_1 eine dieser Nullstellen. Dann lässt sich $f_n(x)$ nach Ausklammern des Koeffizienten a_n wie folgt faktorisieren:

$$f_n(x) = a_n(x - x_1)f_{n-1}(x),$$

wobei f_{n-1} ein geeignetes Polynom vom Grad $n-1$ ist. Wendet man dieses Prozedur rekursiv auf die reduzierten Polynome $f_{n-1}(x)$, $f_{n-2}(x)$, $\ldots$, $f_1(x)$ an, so erhält man schliesslich

$$f_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

wobei die $x_i \in \mathbb{C}$ nicht verschieden sein müssen.

10 Gleichungen

Aufgabe 10.1

$$\begin{aligned} ax + b &= cx + d \\ ax - cx &= d - b \\ x(a - c) &= d - b \\ x &= \frac{d - b}{a - c} \end{aligned}$$

Aufgabe 10.2

$$\begin{aligned} x(2 + x) - 5x - x(3 - 2x) &= 4(6 - (5 - x)x) \\ 2x + x^2 - 5x - 3x + 2x^2 &= 4(6 - 5x + x^2) \\ 3x^2 - 6x &= 24 - 20x + 4x^2 \\ 0 &= x^2 - 14x + 24 \\ 0 &= (x - 2)(x - 12) \end{aligned}$$

$L = \{2, 12\}$

Aufgabe 10.3

$$\begin{aligned} \frac{x + 8}{x - 2} &= \frac{3x - 8}{x^2 - 9x + 14} \\ \frac{x + 8}{x - 2} &= \frac{3x - 8}{(x - 2)(x - 7)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x + 8)(x - 7) &= 3x - 8 \\ x^2 + x - 56 &= 3x - 8 \\ x^2 - 2x - 48 &= 0 \\ (x + 6)(x - 8) &= 0 \end{aligned}$$

$L = \{-6, 8\}$

Aufgabe 10.4

(a)
$$\begin{aligned}
\frac{x-a}{x-b} &= \frac{x-c}{x-d}\\
(x-a)(x-d) &= (x-c)(x-b)\\
x^2-ax-dx+ad &= x^2-bx-cx+bc\\
bx+cx-ax-dx &= bc-ad\\
x(b+c-a-d) &= bc-ad\\
x &= \frac{bc-ad}{b+c-a-d}
\end{aligned}$$

(b)
- genau eine Lösung, wenn $b+c-a-c \neq 0$
- keine Lösung, wenn $b+c-a-c=0$ und $bc-ad \neq 0$
- unendlich viele Lösungen, wenn $b+c-a-c=0$ und $bc-ad=0$

Aufgabe 10.5

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2}+1 &= \sqrt{2x+2}\\
(x+2)+2\sqrt{x+2}+1 &= 2x+2\\
2\sqrt{x+2} &= x-1\\
4(x+2) &= x^2-2x+1\\
0 &= x^2-6x-7\\
0 &= (x+1)(x-7)\\
x_1 &= -1\\
x_2 &= 7
\end{aligned}$$

Probe: $x=-1\colon\ \sqrt{1}+1=\sqrt{0}$ falsch

$x=7\colon\ \sqrt{9}+1=\sqrt{16}$ wahr $\Rightarrow$ $L=\{7\}$

Aufgabe 10.6

$$\begin{aligned}
x^6 &= 16^3\\
x^6 &= \left(2^4\right)^3 = 2^{12}\\
x &= \pm 2^2 = \pm 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.7

$x^4+x^2-12=0$

Substitution $u=x^2$:

$$\begin{aligned}
u^2+u-12 &= 0\\
(u-3)(u+4) &= 0\\
u_1 &= 3 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{3}\\
u_2 &= -4 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_{3,4} = \pm 2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.8

$$\begin{aligned}
2^{x+4} &= 4^{x-1} \\
2^{x+4} &= 2^{2x-2} \\
x+4 &= 2x-2 \\
x &= 6
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.9

$$\begin{aligned}
2^{x+3} &= 3^{x+2} \\
2^3 \cdot 2^x &= 3^2 \cdot 3^x \\
\frac{2^x}{3^x} &= \frac{9}{8} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{9}{8} \\
x \ln \frac{2}{3} &= \frac{9}{8} \\
x &= \frac{9/8}{\ln(2/3)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.10

$$\begin{aligned}
2^{x+2} + 32 &= 4^x \\
2^2 \cdot 2^x + 32 &= 2^{2x} \\
(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 &= 0
\end{aligned}$$

Substitution $u = 2^x$:

$$\begin{aligned}
u^2 - 4u - 32 &= 0 \\
(u+4)(u-8) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= -4 = 2^x \quad &\Rightarrow \quad &\text{keine Lösung} \\
u_2 &= 8 = 2^x \quad &\Rightarrow \quad &x = 3
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.11

Definitionsbereich der Gleichung: $D = \{x \in \mathbb{R} \colon x > -3\}$

$$\begin{aligned}
\log_2(x+3) + \log_2(x+4) &= \log_2(x+7) \\
\log_2(x+3)(x+4) &= \log_2(x+7) \\
(x+3)(x+4) &= x+7 \\
x^2 + 7x + 12 &= x+7 \\
x^2 + 6x + 5 &= 0 \\
(x+1)(x+5) &= 0 \\
x_1 &= -1 \in D \\
x_2 &= -5 \notin D
\end{aligned}$$

$L\{-5\}$

Aufgabe 10.12

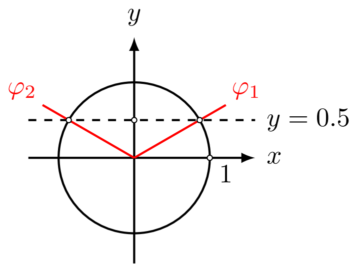
$$\log_4 10 = \log_2 x \quad (x > 0)$$
$$\log_4 10 = \log_4 x^2$$
$$10 = x^2$$
$$x = \sqrt{10}$$

Aufgabe 10.13

$$\log_4(\log_2 x - 1) = \log_{16} 9$$
$$\log_4(\log_2 x - 1) = \log_4 3$$
$$\log_2 x - 1 = 3$$
$$\log_2 x = 4$$
$$x = 16$$

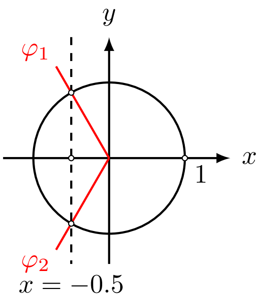
Aufgabe 10.14

$$\sin\varphi = \tfrac{1}{2}$$
$$\varphi = \arcsin\tfrac{1}{2}$$
$$\varphi_1 = \tfrac{\pi}{6}$$
$$\varphi_2 = \pi - \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{5\pi}{6}$$



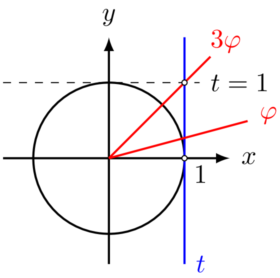
Aufgabe 10.15

$$\cos\varphi = -\tfrac{1}{2}$$
$$\varphi = \arccos\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\varphi_1 = \pi - \arccos\tfrac{1}{2} = \pi - \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{2\pi}{3}$$
$$\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 = 2\pi - \tfrac{2\pi}{3} = \tfrac{4\pi}{3}$$



Aufgabe 10.16

$$\begin{aligned}\tan 3\varphi &= 1\\ 3\varphi &= \arctan 1\\ 3\varphi &= \frac{\pi}{4}\\ \varphi &= \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$



11 Gleichungssysteme

Aufgabe 11.1

Addieren beider Gleichungen ergibt:

$$3x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Einsetzen von $x = 4$ in eine der beiden Gleichungen führt zu

$$4 + 3y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

$L = \{(4, 1)\}$

Aufgabe 11.2

Subtrahiert man das Doppelte der obere Gleichung von der unteren Gleichung, so erhält man $0 = -1$.

Also ist das Gleichungssystem widersprüchlich und es besitzt keine Lösungen.

$L = \{\,\}$

Aufgabe 11.3

Subtrahiert man das Doppelte der obere Gleichung von der unteren Gleichung, so erhält man $0 = 0$.

Also sind alle Wertepaare (x, y), welch eine der beiden Gleichungen erfüllen, Lösungen des Systems:

$L = \{(x, y)\colon 2x + 3y = 5\}$

Aufgabe 11.4

die drei untersten Gleichungen in die oberste Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} 2(1+3t)-3(5+t)+4(2-2t)-5 &= 0 \\ 6t-3t-8t+2-15+8-5 &= 0 \\ -5t-10 &= 0 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

einsetzen in die drei untersten Gleichungen:
$x=-5$, $y=3$ und $z=6$.

Aufgabe 11.5

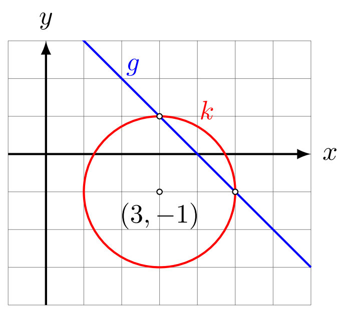
(a) $x+y=4 \quad \Rightarrow \quad y=4-x$ in die obere Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} (x-3)^2+(4-x+1)^2 &= 4 \\ (x-3)^2+(5-x)^2 &= 4 \\ x^2-6x+9+25-10x+x^2 &= 4 \\ 2x^2-16x+30 &= 0 \\ x^2-8x+15 &= 0 \\ (x-5)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$x_1=5 \quad \Rightarrow \quad y_1=4-5=-1$
$x_2=3 \quad \Rightarrow \quad y_1=4-3=1$

$L=\{(5,-1),(3,1)\}$

(b) Die beiden Gleichungen lassen sich als Kreislinie und Gerade in der Ebene deuten. Die Lösungen entsprechen den Schnittpunkten der beiden Figuren.



12 Trigonometrie

Aufgabe 12.1

$\alpha = 120° \cdot \dfrac{\pi}{180°} = \frac{2}{3}\pi$

Aufgabe 12.2

$\alpha = \frac{5}{4}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 5 \cdot 45° = 225°$

Aufgabe 12.3

$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Aufgabe 12.4

$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Aufgabe 12.5

$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

Aufgabe 12.6

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Aufgabe 12.7

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- ...

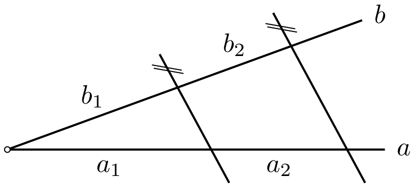
Aufgabe 12.8

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

13 Planimetrie

Aufgabe 13.1

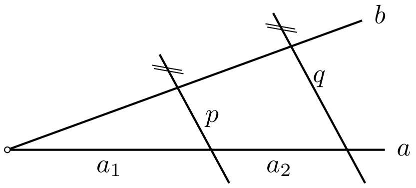
Werden zwei sich schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.



$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$

Aufgabe 13.2

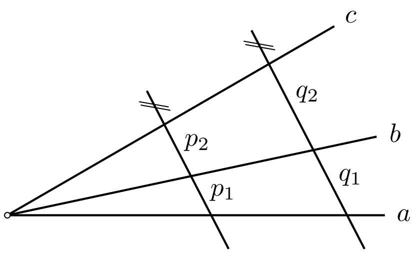
Werden zwei sich schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die vom Schnittpunkt aus gemessenenen Abschnitte auf den Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf den Parallelen.



$a_1 : (a_1 + a_2) = p : q$

Aufgabe 13.3

Werden drei sich in einem Punkt schneidenende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Parallelen wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Parallelen.



$p_1 : p_2 = q_1 : q_2$

Aufgabe 13.4

- $A = g \cdot h$
- $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (Heron)

Aufgabe 13.5

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Inhalte der Kathetenquadrate gleich gross wie der Inhalt des Hypotenusenquadrats.

Aufgabe 13.6

- $u = 3s$
- $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$
- $A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$

Aufgabe 13.7

- $u = 4s$
- $d = s\sqrt{2}$
- $A = s^2$

Aufgabe 13.8

- $u = a + b + c + d$
- $m = \frac{1}{2}(a + b)$
- $A = m \cdot h$

Aufgabe 13.9

- $u = 2\pi r$
- $A = \pi r^2$

14 Stereometrie

Aufgabe 14.1

- Raumdiagonallänge $d = a\sqrt{3}$
- Oberflächeninhalt $S = 6a^2$
- Volumen: a^3

Aufgabe 14.2

- Raumdiagonallänge $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Oberflächeninhalt $S = 2(ab + bc + ca)$
- Volumen: abc

Aufgabe 14.3

- Mantelflächeinhalt: $M = uh$
- Oberflächeinhalt: $S = 2G + M$
- Volumen: Gh

Aufgabe 14.4

- Mantelflächeninhalt: $M = uh = 2\pi rh$
- Oberflächeninhalt: $S = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
- Volumen: $Gh = \pi r^2 h$

Aufgabe 14.5

- Volumen: $V = \frac{1}{3}Gh$

Aufgabe 14.6

- Mantellinienlänge: $m = \sqrt{r^2 + h^2}$
- Mantelflächeninhalt: $M = uh = 2\pi rm$
- Oberflächeninhalt: $S = G + M = 2\pi r^2 + 2\pi rm$
- Volumen: $Gh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Aufgabe 14.7

- Oberflächeninhalt: $S = 4\pi r^2$
- Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

15 Folgen

Aufgabe 15.1

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist eine Abbildung a, die jedem Element $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Statt $a(n)$ schreibt man auch kürzer a_n.

Aufgabe 15.2

(a) Um eine arithmetische Folge

(b) explizit

(c) $a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_{11} = 5 + 10 \cdot 3 = 35$

(d) $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$s_{11} = \frac{11}{2}(5 + 35) = \frac{11 \cdot 40}{2} = 220$

Aufgabe 15.3

(a) Um eine geometrische Folge mit $a_1 = 96$ und $q = \frac{1}{2}$

(b) rekursiv

(c) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_6 = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 96 \cdot \frac{1}{32} = 3$

(d) $s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$s_6 = 96 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 96 \cdot \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = 96 \cdot \frac{63}{64} \cdot 2 = 3 \cdot 63 = 189$

(d) $\lim_{n \to \infty} s_n = 96 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 192$

Aufgabe 15.4

(a) rekursiv

(b) $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$

$a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

$a_3 = \frac{1/3}{2 + 1/3} = \frac{1/3}{7/3} = \frac{1}{7}$

$a_4 = \frac{1/7}{2 + 1/7} = \frac{1/7}{15/7} = \frac{1}{15}$

$a_5 = \frac{1/15}{2 + 1/15} = \frac{1/15}{31/15} = \frac{1}{31}$

(c) Die Nenner sind jeweils um Eins kleiner als eine Zweierpotzenz. Daher vermutet man:
$$a_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

(d) Die Folge ist monoton fallend und sie konvergiert gegen den Grenzwert 0.

Aufgabe 15.5

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\
a_3 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\
\ldots &= \ldots \\
a_{1000} &= \frac{1}{1001}
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.6

$a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{5}{4}$, ...

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{1} = 1$$

Aufgabe 15.7

(a) $a_1 = 1^{-1} = \frac{1}{1}$ $\quad a_3 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $\quad a_5 = 5^{-1} = \frac{1}{5}$
$a_2 = 2^1 = 2$ $\quad a_4 = 4^1 = 4$ $\quad a_6 = 6^1 = 6$

(b) Die Folge divergiert; hat aber den Häufungspunkt 0.

Aufgabe 15.8

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0
\end{aligned}$$

16 Vollständige Induktion

Aufgabe 16.1

(a) $s_1 = \dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$

$$s_2 = s_1 + \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = s_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = s_3 + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

(b) Vermutung: $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(c) *Induktionsverankerung ($n = 1$):*

$s_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ (ok)

Induktionssschritt:

Induktionshypothese (IH): $s_n = \dfrac{n}{n+1}$ sei wahr für $n \geq 1$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &\overset{\text{IH}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \qquad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 16.2

- *Induktionsverankerung ($n = 0$):*

  $5^0 + 7 = 1 + 7 = 8$ ist durch 4 teilbar (ok)

- *Induktionsschritt:*

  – *Induktionshypothese (IH):* 4 teilt $5^n + 7$ für ein $n \geq 0$

  – $n \to (n+1)$:

  $$5^{n+1} + 7 = 5^n \cdot 5 + 7 = \underbrace{1 \cdot 5^n + 7}_{(1)} + \underbrace{4 \cdot 5^n}_{(2)}$$

  (1) ist nach (IH) durch 4 teilbar und (2) ist wegen des Faktors 4 durch 4 teilbar; also ist auch $5^{n+1} + 7$ durch 4 teilbar, was zu beweisen war.

17 Stetigkeit

Aufgabe 17.1

Formal: Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $f(x_0)$ existiert,
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert (unabhängig von der Folge $x \to x_0$),
- $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Anschaulich: Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0, wenn der Graph von f in der Umgebung von x_0 ohne Absetzen des Stifts gezeichnet werden kann.

Aufgabe 17.2

- $f(-2) = -(-2) = 2$
- $\lim\limits_{x \to -2^+} (6 - x^2) = 6 - 4 = 2$
- $f(-2) = \lim\limits_{x \to -2} f(x)$

Also ist f an der Stelle $x = -2$ stetig.

Aufgabe 17.3

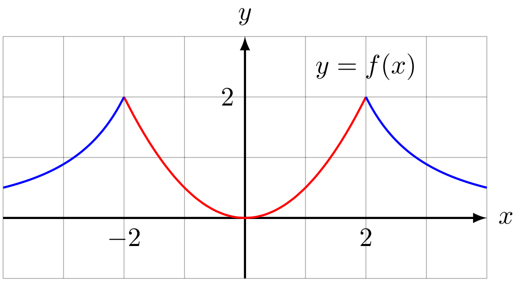
Die Teilfunktion $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ ist für jedes x mit $|x| < 2$ stetig.

Die Teilfunktion $h(x) = \dfrac{a}{x^2}$ ist für jedes x mit $|x| > 2$ stetig.

Somit müssen wir dafür sorgen, dass f bei $x = \pm 2$ stetig ist.
Aus Symmetriegründen $\big[f(-x) = f(x);\, g(-x) = g(x)\big]$ genügt es, den Nachweis für $x = 2$ zu erbringen.

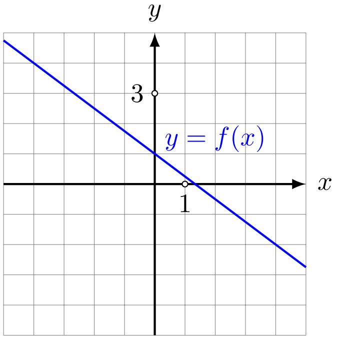
- $f(2) = a/4$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2/2 = 2$

Um $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ zu erfüllen, muss $a = 8$ gewählt werden.

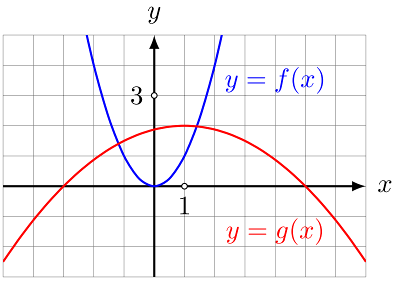


18 Graphen

Aufgabe 18.1



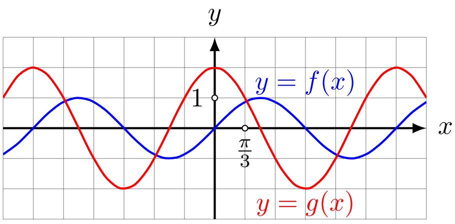
Aufgabe 18.2



Der Graph von f sollte bekannt sein.

Der Graph von g entsteht dadurch, dass der Graph von f mit dem Faktor $\frac{1}{8}$ zur x-Achse hin gestaucht und daran gespiegelt wird. Anschliessend wird die Kurve um den Vektor $(1,2)^{\mathsf{T}}$ verschoben. Man beachte, dass die Subtraktion von -1 vom Argument eine horizontale Verschiebung in *entgegengesetzter* Richtung bewirkt.

Aufgabe 18.3

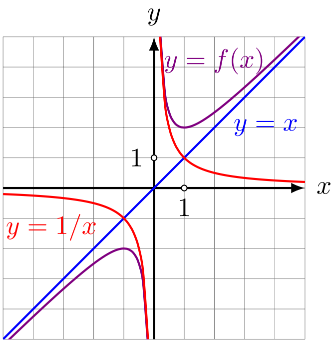


Bei trigonometrischen Funktionen bewirkt die Wahl von $\pi \approx 3$ Einheiten auf der Abszisse keine wesentliche Verzerrung.

Der Graph von f sollte bekannt sein.

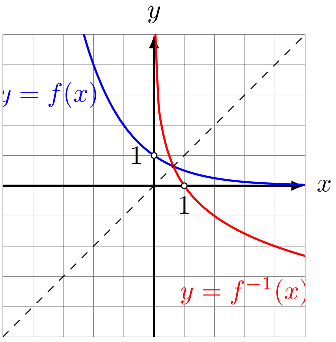
Der Graph von g entsteht dadurch, dass der Graph von f mit dem Faktor 2 entlang der y-Achse gestreckt wird. Anschliessend wird die Kurve um den Vektor $(-1,0)^{\mathsf{T}}$ verschoben. Beachte, dass die Addition von 1 im Argument eine horizontale Verschiebung in *entgegengesetzter* Richtung bewirkt.

Aufgabe 18.4



Graphen der beiden Teilfunktionen $y = x$ und $y = 1/x$ können durch Ordinatenaddition zur Summenfunktion $y = x + 1/x$ superponiert werden.

Aufgabe 18.5



Den Graphen einer Umkehrfunktion erhält man, indem man den Graphen von f an der 1. Winkelhalbierenden ($y = x$) spiegelt.

Aufgabe 18.6

- Nullstelle: $x = 1$
- Ordinatenabschnitt: $y = f(0) = -1$
- Polstelle: $x = -1$ (mit Vorzeichenwechsel)
- horizontale Asymptote: $y = 1$ $\left(\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1 \right)$