Maturavorbereitung GF Mathematik

Kurzaufgaben

31. Mai 2019

Aufgabe 1.1

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 6, 8\}$.

Bestimme $A \cup B$.

Aufgabe 1.1

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 6, 8\}$$

Aufgabe 1.2

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 6, 8\}$.

Bestimme $A \cap B$.

Aufgabe 1.2

$$A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 6, 8\} = \{2, 3\}$$

Aufgabe 1.3

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 6, 8\}$.

Bestimme $A \setminus B$.

Aufgabe 1.3

$$A \setminus B = \{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 6, 8\} = \{1\}$$

Aufgabe 1.4

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 6, 8\}$.

Bestimme $B \setminus A$.

Aufgabe 1.4

$$B \setminus A = \{2, 3, 6, 8\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{6, 8\}$$

Aufgabe 1.5

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 5\}$.

Bestimme $A \times B$.

Aufgabe 1.5

$$A \times B = \{1,2,3\} \times \{2,5\} = \{(1,2),(1,5),(2,2),(2,5),(3,2),(3,5)\}$$

Aufgabe 1.6

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$ und $C = \{4, 5, 7, 9\}$.

Bestimme $|A \times B \times C|$.

Aufgabe 1.6

$$|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C| = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

Aufgabe 1.7

Gegeben ist die Menge $A = \{2, 4, 7\}$.

Bestimme die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$.

Aufgabe 1.7

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\}, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2,4\}, \{2,7\}, \{4,7\}, \{2,4,7\}\}$$

Aufgabe 1.8

Gegeben ist die Menge $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$.

Bestimme $\left|\mathcal{P}(A)\right|$.

Aufgabe 1.8

$$\left|\mathcal{P}(A)\right| = 2^{|A|} = 2^7 = 128$$

Aufgabe 2.1

Was ist eine Funktion?

Aufgabe 2.1

Eine Funktion (oder Abbildung) ist eine Vorschrift, die jedem Element x (dem *Argument*) aus einer Menge X (dem *Definitionsbereich*) genau ein Element y (dem *Wert*) einer Menge Y (dem *Wertebereich*) zuordnet.

Aufgabe 2.2

Wann wird eine Funktion $f: X \to Y$ *injektiv* genannt?

Aufgabe 2.2

Eine Funktion $f: X \to Y$ heisst injektiv, wenn für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq x_2$ folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$.

anschaulich: Jedes $y \in Y$ wird höchstens einmal von einem x „getroffen“.

Aufgabe 2.3

Wann wird eine Funktion $f: X \to Y$ *surjektiv* genannt?

Aufgabe 2.3

Eine Funktion $f: X \to Y$ heisst surjektiv, wenn für alle $y \in X$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$ gilt.

anschaulich: Jedes $y \in Y$ wird mindestens einmal von einem x „getroffen“.

Aufgabe 2.4

Wann wird eine Funktion $f : X \to Y$ *bijektiv* genannt?

Aufgabe 2.4

Eine Funktion $f: X \to Y$ heisst bijektiv, wenn sie injektiv *und* surjektiv ist.

anschaulich: Jedes $y \in Y$ wird genau einmal von einem x „getroffen“.

Aufgabe 2.5

Was bedeutet $(f \circ g \circ h)(x)$?

Aufgabe 2.5

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Aufgabe 2.6

Wie bestimmt man die inverse Abbildung f^{-1} einer Funktion $f : X \to Y$?

Aufgabe 2.6

- Vertausche x und y in der Funktionsgleichung $y = f(x)$.
- Löse diese Gleichung nach y auf.

oder umgekehrt:

- Löse die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auf.
- Vertausche x und y.

Aufgabe 2.7

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = \dfrac{2}{x-1}$.

Aufgabe 2.7

- Vertausche x und y: $x = \dfrac{2}{y-1}$
- Löse nach y auf: $y - 1 = \dfrac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}\colon y = \dfrac{2}{x} + 1$

Aufgabe 3.1

Beschreibe die Menge der natürlichen Zahlen in aufzählender Form und gib alle Operationen an bezüglich derer die Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.1

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_{\nvdash} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation

Aufgabe 3.2

Beschreibe die Menge der ganzen Zahlen in aufzählender Form und gib alle Operationen an bezüglich derer die Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.2

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

abgeschlossen bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation

Aufgabe 3.3

Gib die die Menge der rationalen Zahlen in beschreibender Form an und zähle alle Operationen auf, bezüglich derer die Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.3

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

abgeschlossen bezüglich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

Aufgabe 3.4

Gib die Menge der reellen Zahlen in beschreibender Form an und zähle alle Operationen auf bezüglich derer die Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.4

$\mathbb{R} =$
$\{x\colon x \text{ hat eine abbrechende oder nichtabbrechende Dezimaldarstellung}\}$

abgeschlossen bezüglich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

Aufgabe 3.5

Gib die Menge der komplexen Zahlen in beschreibender Form an.

Aufgabe 3.5

$\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}\, y \colon x, y \in \mathbb{R}\}$ wobei i die Zahl ist mit $\mathrm{i}^2 = -1$

Aufgabe 4.1

Benenne alle Teile des Ausdrucks $c = a^b$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 4.1

$$c = \sqrt[a]{b}$$

a: Basis

b: Exponent

c: Potenz

Aufgabe 4.2

Berechne $17^7 \cdot 17^{-5}$.

Aufgabe 4.2

$$17^7 \cdot 17^{-5} = 17^{7-5} = 17^2 = 289$$

Aufgabe 4.3

Berechne $200^4 \cdot 5^4$.

Aufgabe 4.3

$$200^4 \cdot 5^4 = (200 \cdot 5)^4 = 1000^4 = 10^{12} \text{ (eine Billion)}$$

Aufgabe 4.4

Berechne $2^8 : 2^{17}$.

Aufgabe 4.4

$$2^8 : 2^{17} = 2^{8-17} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$$

Aufgabe 4.5

Berechne $51^3 : 17^3$.

Aufgabe 4.5

$$51^3 : 17^3 = (51 : 17)^3 = 3^3 = 27$$

Aufgabe 4.6

Berechne $(-67)^0$

Aufgabe 4.6

$$(-67)^0 = 1$$

Aufgabe 4.7

Berechne 0^0.

Aufgabe 4.7

0^0 ist nicht definiert.

Aufgabe 4.8

Berechne $(-1)^{-235}$.

Aufgabe 4.8

$$(-1)^{-235} = \frac{1}{(-1)^{235}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Aufgabe 4.9

Berechne 0^{137}.

Aufgabe 4.9

$$0^{137} = 0$$

Aufgabe 4.10

Berechne 2^{3^2}.

Aufgabe 4.10

$$2^{3^2} \overset{\text{Def.}}{=} 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$$

Aufgabe 4.11

Berechne $(2^3)^2$.

Aufgabe 4.11

$$(2^3)^2 = 8^2 = 64$$

Aufgabe 4.12

Vereinfache $2a^7 + 7a^7 - a^7$.

Aufgabe 4.12

$$2a^7 + 7a^7 - a^7 = 8a^7$$

Aufgabe 5.1

Benenne alle Teile des Ausdrucks $c = \sqrt[a]{b}$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 5.1

$$c = \sqrt[a]{b}$$

a: Wurzelexpeonent
b: Radikand
c: Wurzel

Aufgabe 5.2

Berechne $\sqrt[5]{32^6}$.

Aufgabe 5.2

$$\sqrt[5]{32^6} = 32^{\frac{7}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{6}{5}} = 2^6 = 64.$$

Aufgabe 5.3

Berechne $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$.

Aufgabe 5.3

$\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{144} = 12$

oder: $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}6 \cdot 2 = 12$

Aufgabe 5.4

Berechne $\sqrt{7} : \sqrt{63}$.

Aufgabe 5.4

$$\sqrt{7} : \sqrt{63} = \sqrt{7 : 63} = \sqrt{1/9} = 1/3$$

Aufgabe 5.5

Vereinfache $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}$.

Aufgabe 5.5

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2} = 2^{\frac{1}{15}}$$

Aufgabe 5.6

Vereinfache $\sqrt{2\sqrt{2}}$.

Aufgabe 5.6

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2^1 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$$

Aufgabe 5.7

Berechne $\sqrt[3]{27\,000\,000}$.

Aufgabe 5.7

$$\sqrt[3]{27\,000\,000} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{10^6} = 3 \cdot 10^2 = 300$$

Aufgabe 5.8

Berechne $\sqrt{0.000121}$.

Aufgabe 5.8

$$\begin{aligned}\sqrt{0.000121} &= \sqrt{1 \cdot 0.000121} = \sqrt{10^{-6} \cdot 10^{6} \cdot 0.000121} \\ &= \sqrt{10^{-6} \cdot 121} = \sqrt{10^{-6}} \cdot \sqrt{121} = 10^{-3} \cdot 11 \\ &= 0.011\end{aligned}$$

Aufgabe 6.1

Benenne alle Teile des Ausdrucks $c = \log_a b$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 6.1

$c = \log_a b$

a: Basis
b: Numerus
c: Logarithmus

Aufgabe 6.2

Berechne $\log_3 81$.

Aufgabe 6.2

$$\log_3 81 = 4$$

Aufgabe 6.3

Berechne $\log_2 \frac{1}{4}$.

Aufgabe 6.3

$$\log_2 \tfrac{1}{4} = \log_2 \tfrac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2$$

Aufgabe 6.4

Berechne $\log_8 2$.

Aufgabe 6.4

$$\log_8 2 = \log_8 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 6.5

Berechne $\log_{\sqrt{5}} 25\sqrt{5}$.

Aufgabe 6.5

$$\log_{\sqrt{5}} 25\sqrt{5} = \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5}^5 = 5$$

Aufgabe 6.6

Berechne $\log_2 1$.

Aufgabe 6.6

$$\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$$

Aufgabe 6.7

Berechne $\log_2(-4)$.

Aufgabe 6.7

$\log_2(-4)$ ist nicht definiert. (Numerus ≤ 0)

Aufgabe 6.8

Berechne $\log_2(128 \cdot 256)$.

Aufgabe 6.8

$$\log_2(128 \cdot 256) = \log 128 + \log 256 = 7 + 8 = 15$$

Aufgabe 6.9

Berechne $\log_3(243 : \sqrt{27})$.

Aufgabe 6.9

$$\log_3(243 : \sqrt{27}) = \log_3 243 - \log_3 27^{\frac{1}{2}} = 5 - \frac{1}{2}\log_3 27 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

Aufgabe 6.10

Berechne $\log_2(52 : 13)$.

Aufgabe 6.10

$$\log_2(52 : 13) = \log_2 4 = 2$$

Aufgabe 6.11

Berechne $\ln \dfrac{1}{\sqrt[7]{e}}$

Aufgabe 6.11

$$\ln \frac{\sqrt[7]{\mathrm{e}}}{=} \log_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{7}} = -\frac{1}{7}$$

Aufgabe 6.12

Vereinfache $2\log_a\sqrt{x} - \frac{1}{3}\log_a y^3$.

Aufgabe 6.12

$$2\log_a \sqrt{x} - \frac{1}{3}\log_a y^3 = \log_a x : \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

Aufgabe 6.13

Berechne $\lg(0.00001)$

Aufgabe 6.13

$$\lg(0.00001) = \log_{10} 10^{-4} = -4$$

Aufgabe 6.14

Berechne $\mathrm{lb}(1024)$.

Aufgabe 6.14

$\mathrm{lb}(1024) = \log_2 2^{10} = 10$ ($\underline{\text{b}}$inärer Logarithmus)

Aufgabe 6.15

Drücke $\log_3 2$ durch den natürlichen Logarithmus aus.

Aufgabe 6.15

$$\log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} x &= \log_3 2 \\ 3^x &= 3^{\log_3 2} \\ 3^x &= 2 \\ \ln 3^x &= \ln 2 \\ x \ln 3 &= \ln 2 \\ x &= \ln 2 / \ln 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.16

Berechne $9^{2\log_3 5}$.

Aufgabe 6.16

$$9^{2\log_3 5} = \left(3^2\right)^{2\log_3 5} = 3^{4\log_3 5} = 3^{\log_3 5^4} = 5^4 = 625$$

Aufgabe 6.17

Berechne $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 9$.

Aufgabe 6.17

Führe bei allen Logarithmen einen Basiswechsel mit einer beliebigen Basis durch:

$$\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 9 = \frac{\log_3 4}{\log_3 3} \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 5}$$

$$= \frac{\log_3 9}{\log_3 3} = \frac{\log_3 3^2}{\log_3 3} = \frac{2}{1} = 2$$

Aufgabe 7.1

Multipliziere $(a+b)^2$ aus

Aufgabe 7.1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Aufgabe 7.2

Multipliziere $(a-b)^2$ aus

Aufgabe 7.2

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Aufgabe 7.3

Multipliziere $(a+b)(a-b)$ aus

Aufgabe 7.3

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Aufgabe 7.4

Multipliziere $(a+b)^5$ aus.

Aufgabe 7.4

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

oder: $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1; \quad \binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5; \quad \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Aufgabe 7.5

Multipliziere $(2a - 3b)^3$ aus.

Aufgabe 7.5

$$\begin{aligned}(2a-3b)^3 &= 8a^3 - 3\cdot 4a^2\cdot 3b + 3\cdot 2a^2\cdot 9b^2 - 27b^3\\ &= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 0 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

oder: $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1; \quad \binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5; \quad \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$

Aufgabe 7.6

Multipliziere $(x + y + z)^2$ aus.

Aufgabe 7.6

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

Aufgabe 8.1

Faktorisiere $x^4 + 4x^3 + 3x^2$.

Aufgabe 8.1

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 = x^2(x^2 + 4x + 3) = x^2(x+1)(x+3)$$

Aufgabe 8.2

Faktorisiere $y^8 - 1$.

Aufgabe 8.2

$$
\begin{aligned}
y^8 - 1 &= (y^4 + 1)(y^4 - 1) \\
&= (y^4 + 1)(y^2 + 1)(y^2 - 1) \\
&= (y^4 + 1)(y^2 + 1)(y + 1)(y - 1)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.3

Faktorisiere $ac + ad + bc + bd + a + b$.

Aufgabe 8.3

$$
\begin{aligned}
ac + ad + bc + bd + a + b &= a(c+d) + b(c+d) + a + b \\
&= (a+b)(c+d) + (a+b) \\
&= (a+b)(c+d+1)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9.1

Werte $f(x) = x^4 - 14x^3 + 14x - 16 - 7$ an der Stelle $x = 13$ aus.

Aufgabe 9.1

x		-14	14	-16	-7
13	1	-1	1	-3	-46

$f(13) = -46$

Aufgabe 9.2

Wie viele Koeffizienten hat ein Polynom vom Grad 7?

Aufgabe 9.2

Ein Polynom vom Grad 7 hat 8 Koeffizienten:

$$p(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Aufgabe 9.3

Zerlege das Polynom

$$p(x) = 3x^5 - 22x^4 + 58x^3 - 68x^2 + 35x - 6$$

in Linearfaktoren, wenn bekannt ist, dass alle bis auf eine Nullstelle Element von $\mathbb{N}$ sind.

Aufgabe 9.3

x		-22	58	-68	35	-6
1	3	-19	39	-29	6	0
1	3	-16	23	-6	0	
1	3	-13	10	-4		
2	3	-10	3	0		
2	3	-4	-5			
3	3	-1	0			
$\frac{1}{3}$	3	0				

$$p(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-\tfrac{1}{3})$$

Aufgabe 9.4

Berechne $(x^4 - 3x^2 + 4x + 2) : (x^2 + x - 1)$.

Aufgabe 9.4

```
                                                        4x+1
 (x^4       - 3x^2 + 4x + 2):(x^2 + x - 1) = x^2 - x - 1 + -------
-(x^4 + x^3 -  x^2)                                      x^2+x+1
 ------------------
      -x^3 - 2x^2 + 4x + 2
    -(-x^3 -  x^2 +  x)
     ------------------
             -x^2 + 3x + 2
            -(x^2 -  x + 1)
             --------------
                    4x + 1
```

Aufgabe 9.5

Führe mit $\dfrac{5x+3}{(x-1)(x+3)}$ eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 9.5

Ansatz für unterschiedliche Linearfaktoren im Nenner:

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

$$5x+3 = A(x+3) + B(x-1)$$

$$5x+3 = Ax + Bx + 3A - B$$

$$5x+3 = (A+B)x + (3A-B)$$

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \quad (1) \\ 3A - B &= 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt $A = 2$ und $B = 3$

Also: $\dfrac{5x+3}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+3}$

Aufgabe 9.6

Führe mit $\dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^3}$ eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 9.6

Ansatz für eine Potenz eines Linearfaktors im Nenner:

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$x^2+2x+3 = A(x^2-2x+1) + B(x-1) + C$$

$$x^2+2x+3 = Ax^2 - 2Ax + Bx + A - B - C$$

$$x^2+2x+3 = Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B-C)$$

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ -2A+B &= 2 \qquad \Rightarrow B = 4 \\ A-B-C &= 3 \qquad \Rightarrow C = 6 \end{aligned}$$

Also: $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)^3} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{4}{(x-3)^2} + \dfrac{6}{(x-3)^3}$

Aufgabe 9.7

Führe mit $\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+2)}$ eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 9.7

Ansatz für irreduzible quadratische Nennerpolynome:

$$\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$x^2-1 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$$

$$x^2-1 = Ax^3 + Cx^3 + Bx^2 + Dx^2 + 2Ax + Cx + 2B + D$$

$$x^2-1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D)$$

$$\begin{array}{llll} A+C=0 & (1) & 2A+C=0 & (3) \\ B+D=1 & (2) & 2B+D=-1 & (4) \end{array}$$

Aus (1) und (3) folgt $A = C = 0$

Aus (2) und (4) folgt $B = -1$ und $D = 2$

Also: $\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \dfrac{-1}{x^2+1} + \dfrac{2}{x^2+2}$

Aufgabe 9.8

Wie lautet der Fundamentalsatz der Algebra?

Aufgabe 9.8

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes reelle (oder komplexe) Polynom vom Grad n hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.

Aus dem Fundamentalsatz folgt, dass sich ein Polynom vom Grad n als Produkt von n Linearfaktoren $(x - x_i)$ mit $x_i \in \mathbb{C}$, $(i = 1, \ldots, n)$ zerlegen lässt.

Dies lässt sich so einsehen: Ist $f_n(x)$ ein Polynom vom Grad n, so hat $f_n(x)$ aufgrund des Fundamentalsatzes mindestens eine Nullstelle. Sei x_1 eine dieser Nullstellen. Dann lässt sich $f_n(x)$ nach Ausklammern des Koeffizienten a_n wie folgt faktorisieren:

$$f_n(x) = a_n(x - x_1)f_{n-1}(x),$$

wobei f_{n-1} ein geeignetes Polynom vom Grad $n - 1$ ist. Wendet man dieses Prozedur rekursiv auf die reduzierten Polynome $f_{n-1}(x)$, $f_{n-2}(x)$, $\ldots$, $f_1(x)$ an, so erhält man schliesslich

$$f_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

wobei die $x_i \in \mathbb{C}$ nicht verschieden sein müssen.

Aufgabe 10.1

Löse die Gleichung $ax + b = cx + d$ nach x auf.

Aufgabe 10.1

$$ax + b = cx + d$$

$$\begin{aligned} ax - cx &= d - b \\ x(a - c) &= d - b \\ x &= \frac{d - b}{a - c} \end{aligned}$$

Aufgabe 10.2

Löse die Gleichung

$$x(2+x) - 5x - x(3-2x) = 4(6-(5-x)x)$$

in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10.2

$$
\begin{aligned}
x(2+x)-5x-x(3-2x) &= 4(6-(5-x)x) \\
2x+x^2-5x-3x+2x^2 &= 4(6-5x+x^2) \\
3x^2-6x &= 24-20x+4x^2 \\
0 &= x^2-14x+24 \\
0 &= (x-2)(x-12)
\end{aligned}
$$

$L = \{2, 12\}$

Aufgabe 10.3

Löse die Gleichung $\dfrac{x+8}{x-2} = \dfrac{3x-8}{x^2-9x+14}$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10.3

$$\frac{x+8}{x-2} = \frac{3x-8}{x^2-9x+14}$$

$$\frac{x+8}{x-2} = \frac{3x-8}{(x-2)(x-7)}$$

$$(x+8)(x-7) = 3x-8$$

$$x^2+x-56 = 3x-8$$

$$x^2-2x-48 = 0$$

$$(x+6)(x-8) = 0$$

$$L = \{-6, 8\}$$

Aufgabe 10.4

(a) Löse die Gleichung $\dfrac{x-a}{x-b} = \dfrac{x-c}{x-d}$ nach x auf.

(b) Welche Bedingung(en) müssen a, b, c und d erfüllen, damit die Gleichung in (a) ...

- genau eine Lösung,
- keine Lösung,
- unendlich viele Lösungen

hat?

Aufgabe 10.4

(a)
$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{x-c}{x-d}$$
$$(x-a)(x-d) = (x-c)(x-b)$$
$$x^2 - ax - dx + ad = x^2 - bx - cx + bc$$
$$bx + cx - ax - dx = bc - ad$$
$$x(b+c-a-d) = bc - ad$$
$$x = \frac{bc-ad}{b+c-a-d}$$

(b)
- genau eine Lösung, wenn $b+c-a-c \neq 0$
- keine Lösung, wenn $b+c-a-c = 0$ und $bc-ad \neq 0$
- unendlich viele Lösungen, wenn $b+c-a-c = 0$ und $bc-ad = 0$

Aufgabe 10.5

Löse die Gleichung $\sqrt{x+2}+1=\sqrt{2x+2}$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10.5

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2}+1 &= \sqrt{2x+2} \\
(x+2)+2\sqrt{x+2}+1 &= 2x+2 \\
2\sqrt{x+2} &= x-1 \\
4(x+2) &= x^2-2x+1 \\
0 &= x^2-6x-7 \\
0 &= (x+1)(x-7) \\
x_1 &= -1 \\
x_2 &= 7
\end{aligned}$$

Probe: $x=-1\colon\ \sqrt{1}+1=\sqrt{0}\quad$ falsch

$x=7\colon\ \sqrt{9}+1=\sqrt{16}\quad$ wahr $\quad\Rightarrow\quad L=\{7\}$

Aufgabe 10.6

Löse die Gleichung $x^6 = 16^3$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10.6

$$x^6 = 16^3$$

$$x^6 = (2^4)^3 = 2^{12}$$

$$x = \pm 2^2 = \pm 4$$

Aufgabe 10.7

Löse die Gleichung $x^4 + x^2 - 12 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 10.7

$$x^4 + x^2 - 12 = 0$$

Substitution $u = x^2$:

$$u^2 + u - 12 = 0$$

$$(u-3)(u+4) = 0$$

$$u_1 = 3 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

$$u_2 = -4 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_{3,4} = \pm 2\mathrm{i}$$

Aufgabe 10.8

Löse die Gleichung $2^{x+4} = 4^{x-1}$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10.8

$$
\begin{aligned}
2^{x+4} &= 4^{x-1} \\
2^{x+4} &= 2^{2x-2} \\
x+4 &= 2x-2 \\
x &= 6
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.9

Löse die Gleichung $2^{x+3} = 3^{x+2}$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10.9

$$
\begin{aligned}
2^{x+3} &= 3^{x+2} \\
2^3 \cdot 2^x &= 3^2 \cdot 3^x \\
\frac{2^x}{3^x} &= \frac{9}{8} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{9}{8} \\
x \ln \frac{2}{3} &= \frac{9}{8} \\
x &= \frac{9/8}{\ln(2/3)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.10

Löse die Gleichung $2^{x+2} + 32 = 4^x$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10.10

$$2^{x+2} + 32 = 4^x$$

$$2^2 \cdot 2^x + 32 = 2^{2x}$$

$$(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$$

Substitution $u = 2^x$:

$$u^2 - 4u - 32 = 0$$

$$(u + 4)(u - 8) = 0$$

$$u_1 = -4 = 2^x \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$$u_2 = 8 = 2^x \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Aufgabe 10.11

Löse die Gleichung $\log_2(x+3) + \log_2(x+4) = \log_2(x+7)$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10.11

Definitionsbereich der Gleichung: $D = \{x \in \mathbb{R} \colon x > -3\}$

$$\begin{aligned}
\log_2(x+3) + \log_2(x+4) &= \log_2(x+7) \\
\log_2(x+3)(x+4) &= \log_2(x+7) \\
(x+3)(x+4) &= x+7 \\
x^2 + 7x + 12 &= x+7 \\
x^2 + 6x + 5 &= 0 \\
(x+1)(x+5) &= 0 \\
x_1 &= -1 \in D \\
x_2 &= -5 \notin D
\end{aligned}$$

$L\{-5\}$

Aufgabe 10.12

Löse die Gleichung $\log_4 10 = \log_2 x$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10.12

$$\log_4 10 = \log_2 x \quad (x > 0)$$

$$\log_4 10 = \log_4 x^2$$

$$10 = x^2$$

$$x = \sqrt{10}$$

Aufgabe 10.13

Löse die Gleichung $\log_4(\log_2 x - 1) = \log_{16} 9$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 10.13

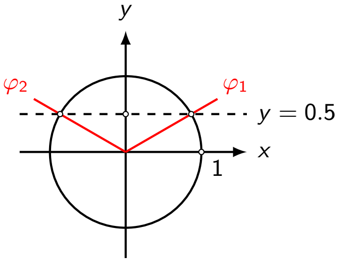
$$\begin{aligned}
\log_4(\log_2 x - 1) &= \log_{16} 9 \\
\log_4(\log_2 x - 1) &= \log_4 3 \\
\log_2 x - 1 &= 3 \\
\log_2 x &= 4 \\
x &= 16
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.14

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ im Intervall $[0, 2\pi)$.

Aufgabe 10.14

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}$$
$$\varphi = \arcsin\frac{1}{2}$$
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$
$$\varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

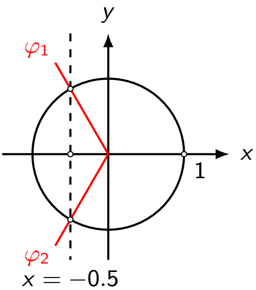


Aufgabe 10.15

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ im Intervall $[0, 2\pi)$.

Aufgabe 10.15

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi &= -\tfrac{1}{2}\\
\varphi &= \arccos\left(-\tfrac{1}{2}\right)\\
\varphi_1 &= \pi - \arccos\tfrac{1}{2} = \pi - \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{2\pi}{3}\\
\varphi_2 &= 2\pi - \varphi_1 = 2\pi - \tfrac{2\pi}{3} = \tfrac{4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

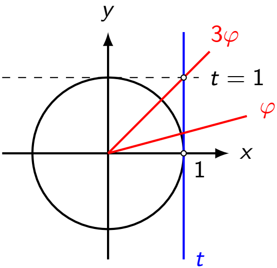


Aufgabe 10.16

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\tan 3\varphi = 1$ im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 10.16

$$\begin{aligned} \tan 3\varphi &= 1 \\ 3\varphi &= \arctan 1 \\ 3\varphi &= \frac{\pi}{4} \\ \varphi &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$



Aufgabe 11.1

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems ohne Taschenrechner.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

Aufgabe 11.1

Addieren beider Gleichungen ergibt:

$$3x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Einsetzen von $x = 4$ in eine der beiden Gleichungen führt zu

$$4 + 3y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

$L = \{(4, 1)\}$

Aufgabe 11.2

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems ohne Taschenrechner.

$$2x - 3y = 2$$
$$4x - 6y = 3$$

Aufgabe 11.2

Subtrahiert man das Doppelte der obere Gleichung von der unteren Gleichung, so erhält man $0 = -1$.

Also ist das Gleichungssystem widersprüchlich und es besitzt keine Lösungen.

$L = \{\,\}$

Aufgabe 11.3

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssysstems ohne Taschenrechner.

$$2x + 3y = 5$$
$$4x + 6y = 10$$

Aufgabe 11.3

Subtrahiert man das Doppelte der obere Gleichung von der unteren Gleichung, so erhält man $0 = 0$.

Also sind alle Wertepaare (x, y), welch eine der beiden Gleichungen erfüllen, Lösungen des Systems:

$L = \{(x, y) \colon 2x + 3y = 5\}$

Aufgabe 11.4

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
0 &= 2x - 3y + 4z - 5 \\
x &= 1 + 3t \\
y &= 5 + t \\
z &= 2 - 2t
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11.4

die drei untersten Gleichungen in die oberste Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} 2(1+3t)-3(5+t)+4(2-2t)-5 &= 0 \\ 6t-3t-8t+2-15+8-5 &= 0 \\ -5t-10 &= 0 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

einsetzen in die drei untersten Gleichungen:

$x = -5$, $y = 3$ und $z = 6$.

Aufgabe 11.5

(a) Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned}(x-3)^2+(y+1)^2&=4\\ x+y&=4\end{aligned}$$

(b) Gib eine geometrische Interpretation für die Gleichungen und deren Lösung an.

Aufgabe 11.5

(a) $x + y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 4 - x$ in die obere Gleichung einsetzen:

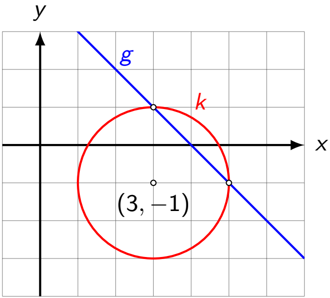
$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (4-x+1)^2 &= 4 \\ (x-3)^2 + (5-x)^2 &= 4 \\ x^2 - 6x + 9 + 25 - 10x + x^2 &= 4 \\ 2x^2 - 16x + 30 &= 0 \\ x^2 - 8x + 15 &= 0 \\ (x-5)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4 - 5 = -1$

$x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4 - 3 = 1$

$L = \{(5, -1), (3, 1)\}$

(b) Die beiden Gleichungen lassen sich als Kreislinie und Gerade in der Ebene deuten. Die Lösungen entsprechen den Schnittpunkten der beiden Figuren.



Aufgabe 12.1

Rechne die Winkelgrösse $\alpha = 120^\circ$ ins Bogenmass um.

Aufgabe 12.1

$$\alpha = 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$

Aufgabe 12.2

Rechne die Winkelgrösse $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ ins Gradmass um.

Aufgabe 12.2

$$\alpha = \frac{5}{4}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 5 \cdot 45^\circ = 225^\circ$$

Aufgabe 12.3

Wie ist der Sinus eines Winkels α im rechtwinkligen Dreieck definiert?

Aufgabe 12.3

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Aufgabe 12.4

Wie ist der Cosinus eines Winkels α im rechtwinkligen Dreieck definiert?

Aufgabe 12.4

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Aufgabe 12.5

Wie ist der Tangens eines Winkels α im rechtwinkligen Dreieck definiert?

Aufgabe 12.5

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

Aufgabe 12.6

Vervollständige die Wertetabelle.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

Aufgabe 12.6

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Aufgabe 12.7

Nenne mindestens eine Beziehung zwischen Sinus und Cosinus eines Winkels α.

Aufgabe 12.7

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\ldots$

Aufgabe 12.8

Nenne eine Beziehung zwischen Sinus, Cosinus und Tangens eines Winkels α.

Aufgabe 12.8

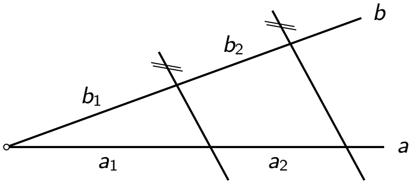
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Aufgabe 13.1

Formuliere den ersten Strahlensatz.

Aufgabe 13.1

Werden zwei sich schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.



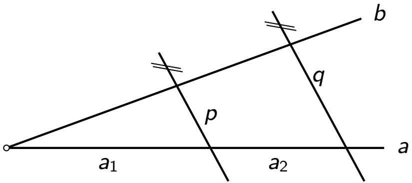
$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$

Aufgabe 13.2

Formuliere den zweiten Strahlensatz.

Aufgabe 13.2

Werden zwei sich schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die vom Schnittpunkt aus gemessenenen Abschnitte auf den Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf den Parallelen.



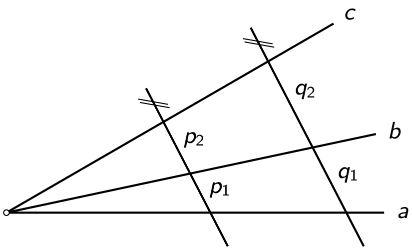
$$a_1 : (a_1 + a_2) = p : q$$

Aufgabe 13.3

Formuliere den dritten Strahlensatz.

Aufgabe 13.3

Werden drei sich in einem Punkt schneidenende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Parallelen wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Parallelen.



$p_1 : p_2 = q_1 : q_2$

Aufgabe 13.4

Gib zwei verschiedene Formeln an, um den Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks zu berechnen.

Aufgabe 13.4

- $A = g \cdot h$
- $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (Heron)

Aufgabe 13.5

Formuliere der Satz des Pythagoras.

Aufgabe 13.5

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Inhalte der Kathetenquadrate gleich gross wie der Inhalt des Hypotenusenquadrats.

Aufgabe 13.6

Gib Formeln für die Berechnung von Umfang, Höhe und Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge s an.

Aufgabe 13.6

- $u = 3s$
- $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$
- $A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$

Aufgabe 13.7

Gib Formeln für die Berechnung von Umfang, Diagonale und Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge s an.

Aufgabe 13.7

- $u = 4s$
- $d = s\sqrt{2}$
- $A = s^2$

Aufgabe 13.8

Gib die Formeln für die Berechnung des Umfangs (u), der Mittellinie (m) und des Flächeninhalts (A) eines Trapezes an.

Aufgabe 13.8

- $u = a + b + c + d$
- $m = \frac{1}{2}(a + b)$
- $A = m \cdot h$

Aufgabe 13.9

Gib die Formeln für die Berechnung des Umfangs (u) und des Flächeninhalts (A) eines Kreises mit dem Radius r an.

Aufgabe 13.9

- $u = 2\pi r$
- $A = \pi r^2$

Aufgabe 14.1

Gib Formeln für die Berechnung von Raumdiagonallänge d, Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) eines Würfels mit der Kantenlänge a an.

Aufgabe 14.1

- Raumdiagonallänge $d = a\sqrt{3}$
- Oberflächeninhalt $S = 6a^2$
- Volumen: a^3

Aufgabe 14.2

Gib Formeln für die Berechnung von Raumdiagonallänge d, Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c an.

Aufgabe 14.2

- Raumdiagonallänge $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Oberflächeninhalt $S = 2(ab + bc + ca)$
- Volumen: abc

Aufgabe 14.3

Gib Formeln für die Berechnung von Mantelflächeninhalt (M), Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) eines geraden Prismas mit der Grundfläche G, dem Grundflächenumfang u und der Höhe h an.

Aufgabe 14.3

- Mantelflächeinhalt: $M = uh$
- Oberflächeinhalt: $S = 2G + M$
- Volumen: Gh

Aufgabe 14.4

Gib Formeln für die Berechnung von Mantelflächeninhalt (M), Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundflächenradius r und der Höhe h an.

Aufgabe 14.4

- Mantelflächeninhalt: $M = uh = 2\pi rh$
- Oberflächeninhalt: $S = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
- Volumen: $Gh = \pi r^2 h$

Aufgabe 14.5

Gib die Formel für die Berechnung des Volumens (V) einer Pyramide mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h an.

Aufgabe 14.5

- Volumen: $V = \frac{1}{3} G h$

Aufgabe 14.6

Gib Formeln für die Berechnung von Mantelflächeninhalt (M), Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) eines geraden Kreiskegels mit dem Grundflächenradius r und der Höhe h an.

Aufgabe 14.6

- Mantellinienlänge: $m = \sqrt{r^2 + h^2}$
- Mantelflächeninhalt: $M = uh = 2\pi rm$
- Oberflächeninhalt: $S = G + M = 2\pi r^2 + 2\pi rm$
- Volumen: $Gh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Aufgabe 14.7

Gib Formeln für die Berechnung von Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) einer Kugel mit dem Radius r an.

Aufgabe 14.7

- Oberflächeninhalt: $S = 4\pi r^2$
- Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Aufgabe 15.1

Was ist eine reelle Zahlenfolge?

Aufgabe 15.1

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist eine Abbildung a, die jedem Element $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Statt $a(n)$ schreibt man auch kürzer a_n.

Aufgabe 15.2

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_n = 3n + 2$

(a) Um welche Art von Folge handelt es sich?

(b) In welcher Weise ist die Folge definiert?

(c) Berechne a_{11}.

(d) Berechne s_{11}.

Aufgabe 15.2

(a) Um eine arithmetische Folge

(b) explizit

(c) $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_{11} = 5 + 10 \cdot 3 = 35$$

(d) $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$s_{11} = \frac{11}{2}(5+35) = \frac{11 \cdot 40}{2} = 220$$

Aufgabe 15.3

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_1 = 96$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.

(a) Um welche Art von Folge handelt es sich?

(b) In welcher Weise ist die Folge definiert?

(c) Berechne a_6.

(d) Berechne s_6.

(e) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Aufgabe 15.3

(a) Um eine geometrische Folge mit $a_1 = 96$ und $q = \frac{1}{2}$

(b) rekursiv

(c) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_6 = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 96 \cdot \frac{1}{32} = 3$$

(d) $s_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$

$$s_6 = 96 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = 96 \cdot \frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = 96 \cdot \frac{63}{64} \cdot 2 = 3 \cdot 63 = 189$$

(d) $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 96 \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 192$

Aufgabe 15.4

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n}$

(a) In welcher Weise ist die Folge definiert?

(b) Berechne a_2, a_3, a_4 und a_5.

(c) Gib eine explizite Formel für (a_n) an.

(d) Untersuche die Folge in Bezug auf Wachstum, Häufungspunkte und Grenzwert.

Aufgabe 15.4

(a) rekursiv

(b) $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$

$$a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1/3}{2+1/3} = \frac{1/3}{7/3} = \frac{1}{7}$$

$$a_4 = \frac{1/7}{2+1/7} = \frac{1/7}{15/7} = \frac{1}{15}$$

$$a_5 = \frac{1/15}{2+1/15} = \frac{1/15}{31/15} = \frac{1}{31}$$

(c) Die Nenner sind jeweils um Eins kleiner als eine Zweierpotzenz. Daher vermutet man:

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

(d) Die Folge ist monoton fallend und sie konvergiert gegen den Grenzwert 0.

Aufgabe 15.5

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$

Berechne a_{1000}.

Aufgabe 15.5

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\ldots = \ldots$$

$$a_{1000} = \frac{1}{1001}$$

Aufgabe 15.6

Untersuche die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ auf Konvergenz und gib gegebenenfalls den Grenzwert an.

Aufgabe 15.6

$$a_1 = \frac{3}{2},\ a_2 = \frac{4}{3},\ a_3 = \frac{5}{4},\ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{1} = 1$$

Aufgabe 15.7

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_n = n^{(-1)^n}$

(a) Berechne die ersten sechs Glieder der Folge (a_n).

(b) Untersuche (a_n) auf Konvergenz und gib gegebenenfalls den Grenzwert an.

Aufgabe 15.7

(a) $a_1 = 1^{-1} = \frac{1}{1}$ $\quad a_3 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $\quad a_5 = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

$a_2 = 2^1 = 2$ $\quad a_4 = 4^1 = 4$ $\quad a_6 = 6^1 = 6$

(b) Die Folge divergiert; hat aber den Häufungspunkt 0.

Aufgabe 15.8

Berechne den Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 15.8

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 16.1

(a) Berechne die ersten 4 Glieder der Teilsummenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

(b) Gib eine explizite Formel zur Berechnung von s_n an.

(c) Beweise diese Formel mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 16.1

(a) $$s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = s_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = s_3 + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

(b) Vermutung: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(c) *Induktionsverankerung ($n = 1$):*

$$s_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ (ok)}$$

Induktionssschritt:

Induktionshypothese (IH): $s_n = \dfrac{n}{n+1}$ sei wahr für $n \geq 1$

$n \to n+1$:

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\overset{\text{IH}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \qquad \square$$

Aufgabe 16.2

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $5^n + 7$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 4 teilbar ist.

Aufgabe 16.2

- *Induktionsverankerung ($n = 0$):*
  $5^0 + 7 = 1 + 7 = 8$ ist durch 4 teilbar (ok)
- *Induktionsschritt:*
  - *Induktionshypothese (IH):* 4 teilt $5^n + 7$ für ein $n \geq 0$
  - $n \to (n+1)$:

    $$5^{n+1} + 7 = 5^n \cdot 5 + 7 = \underbrace{1 \cdot 5^n + 7}_{(1)} + \underbrace{4 \cdot 5^n}_{(2)}$$

    (1) ist nach (IH) durch 4 teilbar und (2) ist wegen des Faktors 4 durch 4 teilbar; also ist auch $5^{n+1} + 7$ durch 4 teilbar, was zu beweisen war.

Aufgabe 17.1

Beschreibe die *Stetigkeit* einer Funktion f auf formale und auf anschauliche Art.

Aufgabe 17.1

Formal: Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $f(x_0)$ existiert,
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert (unabhängig von der Folge $x \to x_0$),
- $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Anschaulich: Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0, wenn der Graph von f in der Umgebung von x_0 ohne Absetzen des Stifts gezeichnet werden kann.

Aufgabe 17.2

Untersuche, ob die stückweise defnierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{wenn } x \leq -2 \\ 6 - x^2 & \text{wenn } -2 < x \end{cases}$$

an der Stelle $x = -2$ stetig ist.

Aufgabe 17.2

- $f(-2) = -(-2) = 2$
- $\lim\limits_{x \to -2^+} (6 - x^2) = 6 - 4 = 2$
- $f(-2) = \lim\limits_{x \to -2} f(x)$

Also ist f an der Stelle $x = -2$ stetig.

Aufgabe 17.3

Für welchen Wert des Parameters ist die abschnittsweise definiert Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } |x| < 2 \\ a/x^2 & \text{für } |x| \geq 2 \end{cases}$$

überall stetig?

Aufgabe 17.3

Die Teilfunktion $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ ist für jedes x mit $|x| < 2$ stetig.

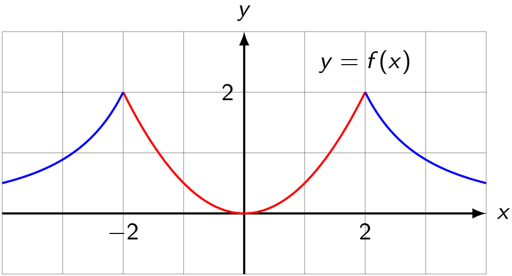
Die Teilfunktion $h(x) = \dfrac{a}{x^2}$ ist für jedes x mit $|x| > 2$ stetig.

Somit müssen wir dafür sorgen, dass f bei $x = \pm 2$ stetig ist.

Aus Symmetriegründen $\left[f(-x) = f(x);\ g(-x) = g(x)\right]$ genügt es, den Nachweis für $x = 2$ zu erbringen.

- $f(2) = a/4$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2/2 = 2$

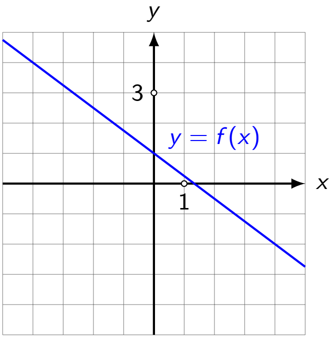
Um $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ zu erfüllen, muss $a = 8$ gewählt werden.


y
y = f(x)
2
x
−2
2

Aufgabe 18.1

Skizziere die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$ in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 18.1



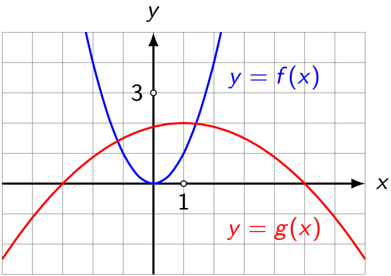
Aufgabe 18.2

Skizziere möglichst geschickt die Graphen der Funktionen

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = -\frac{1}{8}(x-1)^2 + 2$

in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Aufgabe 18.2



Der Graph von f sollte bekannt sein.

Der Graph von g entsteht dadurch, dass der Graph von f mit dem Faktor $\frac{1}{8}$ zur x-Achse hin gestaucht und daran gespiegelt wird. Anschliessend wird die Kurve um den Vektor $(1, 2)^{\mathsf{T}}$ verschoben. Man beachte, dass die Subtraktion von -1 vom Argument eine horizontale Verschiebung in *entgegengesetzter* Richtung bewirkt.

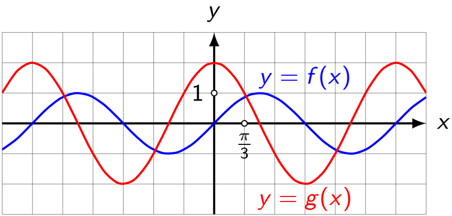
Aufgabe 18.3

Skizziere möglichst geschickt die Graphen der Funktionen

- $f(x) = \sin x$
- $g(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Aufgabe 18.3



Bei trigonometrischen Funktionen bewirkt die Wahl von $\pi \approx 3$ Einheiten auf der Abszisse keine wesentliche Verzerrung.

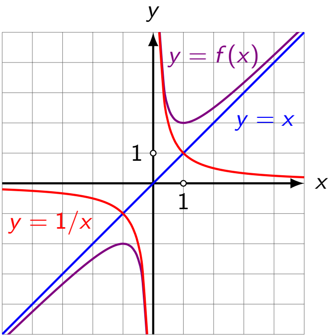
Der Graph von f sollte bekannt sein.

Der Graph von g entsteht dadurch, dass der Graph von f mit dem Faktor 2 entlang der y-Achse gestreckt wird. Anschliessend wird die Kurve um den Vektor $(-1, 0)^{\mathsf{T}}$ verschoben. Beachte, dass die Addition von 1 im Argument eine horizontale Verschiebung in *entgegengesetzter* Richtung bewirkt.

Aufgabe 18.4

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ durch Superposition.

Aufgabe 18.4

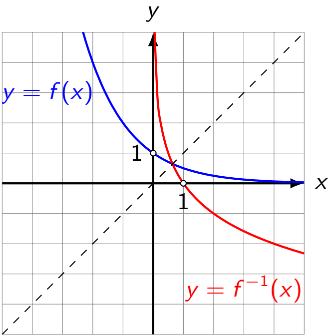


Graphen der beiden Teilfunktionen $y = x$ und $y = 1/x$ können durch Ordinatenaddition zur Summenfunktion $y = x + 1/x$ superponiert werden.

Aufgabe 18.5

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = 2^{-x}$ und den Graphen der Umkehrfunktion von f ins gleiche Koodinatensystem.

Aufgabe 18.5



Den Graphen einer Umkehrfunktion erhält man, indem man den Graphen von f an der 1. Winkelhalbierenden ($y = x$) spiegelt.

Aufgabe 18.6

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

Aufgabe 18.6

- Nullstelle: $x = 1$
- Ordinatenabschnitt: $y = f(0) = -1$
- Polstelle: $x = -1$ (mit Vorzeichenwechsel)
- horizontale Asymptote: $y = 1$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1\right)$