Mündliche Matura 2019 Themen GF Mathematik/PAM 6c

Die mündliche Maturaprüfung dauert 15 Minuten und besteht aus zwei Teilen, für die etwa gleich viel Zeit zur Verfügung steht:

- einem Theoriethema aus einem der folgenden Gebiete:
  - *Verschiedenes*
  - *Analysis*
  - *Vektorgeometrie*
  - *Stochastik und Kombinatorik*

  Die unten zu den Themen angegebenen Stichworte sind dazu da, den Umfang abzugrenzen und fehlen an der Prüfung.
- einer Aufgabe, die aus einem zum Theoriethema komplementären Gebiet stammt.

Bei der Zusammenstellung der Aufgaben werden im Voraus etwa 25–30 Theoriethemen durch zufälliges Ziehen mit Zurücklegen ausgelost und jeweils durch eine Aufgabe aus einem der komplementären Gebiete ergänzt. Diese Theorie-Aufgaben-Kombinationen stehen euch an der mündlichen Matura in verschlossenen Couverts zur Auswahl.

Die Prüfungsteile (Theorie, Aufgabe) können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.

Beurteilungskriterien für die mündliche Prüfung

- Fachliche Richtigkeit
- Vollständigkeit / Schwerpunktsetzung
- Logischer Aufbau
- Darstellung / Veranschaulichung
- (Fach-)Sprache
- Dialogfähigkeit

1. Arithmetische Folgen (Verschiedenes)

- formale Definition einer Folge
- explizite und rekursive Definition der arithmetische Folge (AF)
- Definition der Teilsummenfolge
- Summenformel der AF (mit Herleitung)

2. Geometrische Folgen (Verschiedenes)

- formale Definition einer Folge
- explizite und rekursive Definition der geometrischen Folge (GF)
- Definition der Teilsummenfolge (=Reihe)
- Summenformel für die abbrechende und die nichtabbrechende GF (mit Herleitung)

3. Zahlbereiche (Verschiedenes) Der Aufbau der Zahlbereiche (von $\mathbb{N}$ bis $\mathbb{C}$)

- Die Menge der natürliche Zahlen (mit der Null) $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$)
- Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$
- Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$
- Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$
- Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$
- weitere Begriffe: irrationale Zahlen, imaginäre Zahlen, Abzählbarkeit
- Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$

4. Fundamentalsatz der Algebra und Partialbruchzerlegung (Verschiedenes)

- Nenne den Fundamentalsatz der Algebra
- partielle Integration: Grundgedanke, Motivation, die drei Ansätze, Beispiel

5. Differenzialquotient und graphisches Differenzieren (Analysis)

- Skizze des Graphen einer geeigneten Funktion f mit Punkt $P \in G_f$.
- Differenzenquotient als Steigung einer Sekante durch P und einem weiteren Kurvenpunkt Q.
- Differenzialquotient als Grenzwert der Sekantensteigung, wenn Q gegen P strebt.
- Graphisches Differenzieren am Graphen einer geeigneten Beispielfunktion zeigen.

6. Ableitungen der elementaren Funktionen und Ableitungsregeln (Analysis)

- Ableitungsfunktion von x^s, $1/x^s$, $\sqrt{x}$, e^x, $\ln x$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$
- Ableitungsregeln: Summen-, Faktor-, Produkt- und Kettenregel
- Beispiele exemplarisch vorrechnen

7. Diskussion ganzrationaler Funktionen (Analysis)

- Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten und Asymptoten, Nullstellen und Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wende- bzw. Terrassenpunkte
- an einer leicht zu rechnenden Funktion (z. B. $f(x) = x^3 - 3x$) vorzeigen

8. Das bestimmte Integral als Riemannsche Summe (Analysis)

- Welche Voraussetzungen muss eine Funktion erfüllen, um sicher integrierbar zu sein?
- Fertige eine geeignete Skizze an.
- Wähle eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$
- Definiere das bestimmte Integral als Grenzwert der Summe der Rechtecksflächen, welche die Fläche approximieren.
- nenne Eigenschaften des bestimmten Integrals

9. Integrationsregeln (Analysis)

- Regel für Summen und skalare Vielfache von Funktionen.
- Partielle Integration (Herleitung)
- Substitutionsregel (Herleitung)
- Vorrechnen eines geeigneten Beispiels.

10. Volumenberechnung von Rotationskörpern (Analysis)

- Herleitung der Volumenformel für Rotationskörper anhand einer Skizze mit einer stetigen nichtnegativen Randfunktion $y = f(x)$
- Vorrechnen eines geeigneten Beispiels

11. Produkte mit Vektoren und ihre Anwendung (Vektoren)

- s-Multiplikation: Zahl $\cdot$ Vektor $=$ Vektor
- Skalarprodukt: Vektor $\cdot$ Vektor $=$ Zahl

- Vektorprodukt (Kreuzprodukt): Vektor $\times$ Vektor = Vektor
- Spatprodukt (gemischtes Produkt): (Vektor $\times$ Vektor) $\cdot$ Vektor = Zahl
- Anwendung des Skalarprodukts: Winkelberechnungen
- Anwendung des Vektorprodukts: Normalenvektoren, Flächenberechnungen, Abstandsberechnungen
- Anwendung des Spatprodukts: Volumen, Abstandsberechnungen

12. Die Gerade im Raum (Vektoren)

- Definition der Geradengleichung;
- Wann liegt ein Punkt auf einer Geraden g?
- Was sind Spurpunkte? Wie berechnet man sie?
- Beschreibe die vier Fälle der gegenseitigen Lage von zwei Geraden.
- Abstands- und Winkelberechnungen

13. Die Ebene im Raum (Vektoren)

- Definition der Ebenengleichung (Koordinatenform);
- Wie bestimmt man eine Ebenengleichung aus drei gegebenen Punkten?
- Wann liegt ein Punkt in einer Ebene ε?
- Was sind Achsenabschnitte von ε? Wie berechnet man sie?
- Beschreibe die drei Fälle der gegenseitigen Lage von zwei Ebenen.
- Abstands- und Winkelberechnungen

14. Die Sphäre (Vektoren)

- Definition der Gleichung einer Sphäre
- Gegenseitige Lage von Sphäre und Gerade
- Gegenseitige Lage von Sphäre und Ebene
- Gegenseitige Lage zweier Sphären

15. Beschreibende Statistik (Stochastik)

- Aufgaben der beschreibenden Statistik

- Masse der zentralen Tendenz: (empirisches) arithmetisches Mittel, Modus, Median, Quartile
- Masse der Streuung: (empirsche) Varianz, (empirische) Standardabweichung, Spannweite und Interquartilsabstand
- evtl. anhand eines kleinen Beispieldatensatzes mit einfachen Zahlen vorzeigen
- grafische Darstellung von Zahlenmaterial

16. Kombinatorik (Stochastik)

- Beschreibe die Aufgabe der Kombinatorik
- Produkt- und Summenregel
- Anordnungsprobleme (Variationen) mit und ohne Wiederholungen
- Auswahlprobleme (Kombinationen) mit und ohne Wiederholungen

17. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik)

- Begriffe: Zufallsexperiment, Ergebnis, Stichprobenraum, Ereignis, sicheres Ereignis, unmögliches Ereignis, Gegenereignis, unvereinbare Ereignisse
- Kolmogoroff-Axiome
- Laplace-Wahrscheinlichkeit (klassische Wahrscheinlichkeit)

18. Elementare Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik)

- Additionssatz
- Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit
- Multiplikationssatz / Kettenregel
- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes

19. Die Binomialverteilung (Stochastik)

- Begriffe: Bernoulli-Experiment, bernoulliverteilte Zufallsvariable, merhrstufiges Bernoulli-Experiment
- Satz/Formel von Bernoulli
- Graphische Darstellung der Verteilung
- Eigenschaften der Binomialverteilung (Verteilungstyp, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung)

20. Die Normalverteilung (Stochastik)

- Normalverteilung, Standardnormalverteilung,
- graphische Darstellung
- Dichtefunktion (mit Eigenschaften)
- Eigenschaften (Verteilungstyp, kumulative Verteilungsfunktion, Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswert, Varianz, Sigma-Regeln)

Zusammenfassungen

1. Arithmetische Folgen (Verschiedenes)

Eine *Folge reeller Zahlen* (a_n) ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet.

explizite Definition: $a_n = a_1 + (n-1)d$

rekursive Definition: a_1 und $a_{n+1} = a_n + d$

Teilsummenfolge/Reihe: $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

Herleitung/Beweis der Summenformel:

- Schreibe die Summengleichungen in unterschiedlicher Reihenfolge untereinander auf:

  $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$

  $s_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \quad (2)$

- Addiere die beiden Gleichungen und achte darauf, dass die Summen der an der gleichen Position jeweils zusammengefasst werden:

  $2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \quad (3)$

- Zeige, dass alle Klammerterme den gleichen Wert $a_1 + a_n$ haben, setze dies in (3) ein und vereinfache:

  $2s_n = n\big(a_1 + a_n\big) \quad (4)$

- Löse (4) nach s_n auf.

2. Geometrische Folgen (Verschiedenes)

Eine *Folge reeller Zahlen* (a_n) ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet.

explizite Definition: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

rekursive Definition: a_1 und $a_{n+1} = qa_n$

Teilsummenfolge/Reihe: $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$

Herleitung/Beweis der Summenformel:

- Ersetze in $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ jeweils $a_k = a_1 q^{k-1}$:
  $s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \quad (1)$
- Multipliziere (1) mit q und notiere diese Gleichung nach Potenzen sortiert unter (1):
  $qs_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n \quad (2)$
- Berechne (1) − (2): $s_n - qs_n = a_1 - a_1 q^n$ [(2) − (1) geht auch!]
- Löse die verbleibende Gleichung nach s_n auf.

Also: $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Die zweite Formel gewinnt man durch Erweitern mit (-1).

Für $|q| < 1$ existiert der Grenzwert der *nichtabbrechenden geometrischen Reihe*:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} \qquad \text{wegen } \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

3. Zahlbereiche (Verschiedenes)

- natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (abzählbar unendlich)
- natürliche Zahlen mit der Null $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (abzählbar unendlich)
- ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (abzählbar unendlich)
- rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\}$ (abzählbar unendlich)
- reelle Zahlen (überabzählbar)
  $\mathbb{R} = \{x \colon x \text{ hat eine abbrechende oder nichtabbrechende Dezimalentwicklung}\}$
- komplexe Zahlen (überabzählbar) $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}\, y \colon x, y \in \mathbb{R}\}$

Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ (indirekt):

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p,\ q \in \mathbb{N}$ teilerfremd

$$\frac{p^2}{q^2} \overset{(*)}{=} 2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2 \cdot q^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 \text{ ist gerade} \quad \Rightarrow \quad p \text{ ist gerade}$$

Annahme 2: wäre p ungerade, so gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $p = 2s + 1$. Aus $p^2 = 4s^2 + 4s + 1$ würde folgen, dass p^2 ungerade wäre, was im Widerspruch zur Voraussetzung stünde, dass p^2 gerade ist. Also ist die Annahme 2 falsch und p gerade.

also gilt $p = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{(2k)^2}{q^2} \overset{(*)}{=} \frac{4k^2}{q^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2k^2 = q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 \text{ ist gerade} \quad \overset{\text{wie oben}}{\Rightarrow} \quad q \text{ ist gerade}$$

$\Rightarrow$ p und q sind durch 2 teilbar $\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme der Teilerfremdheit.
Somit ist die Annahme falsch und $\sqrt{2}$ nicht als Quotient ganzer Zahlen darstellbar.

4. Fundamentalsatz der Algebra und Partialbruchzerlegung (Verschiedenes)

- Fundamentalsatz der Algebra
  Jedes Polynom n-ten Grades $p(x)$ zerfällt in n Linearfaktoren:
  $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$
- Partialbruchzerlegung:

  Idee Stelle ein Produkt von Brüchen als Summe von Brüchen dar.

  Anwendung: Algebra, Integration

  Ansatz 1: $(x_1 \neq x_2)$

$$\frac{p(x)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2}$$

  Ansatz 2: (Potenz eines Linearfaktors)

$$\frac{p(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{A_{1,1}}{x - x_0} + \frac{A_{1,2}}{(x - x_0)^2}$$

  Ansatz 3: (irreduzible Polynome vom Grad 2):

$$\frac{p(x)}{(x^2 + b_1 x + c_1)(x^2 + b_2 x + c_2)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2 + b_2 x + c_2}$$

  Alle Ansätze lassen sich auf $n > 2$ Faktoren fortsetzen.

  Beispiel:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$
$$x = A(x+2) + B(x+1)$$
$$x = (A+B)x + (2A+B)$$

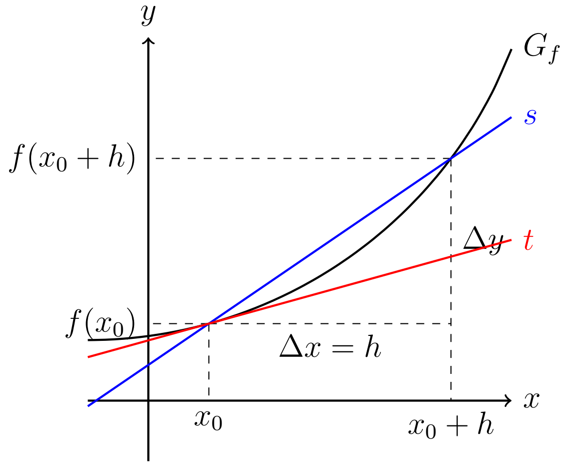
  Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A + B &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 2 \end{aligned}$$

5. Differenzialquotient und graphisches Differenzieren (Analysis)

Gegeben: eine geeignete Funktion f

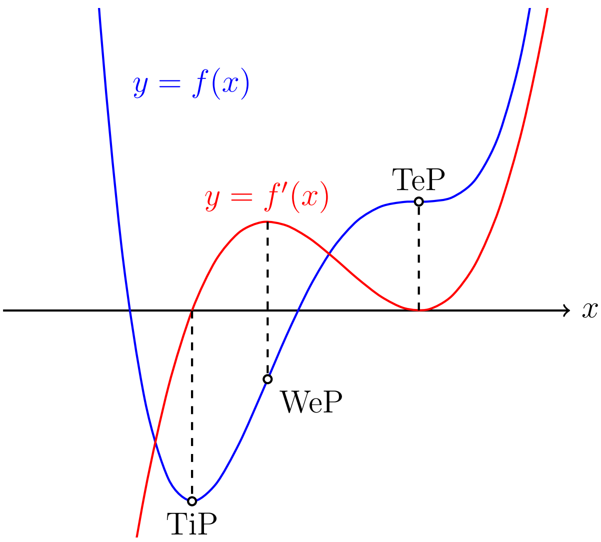
Gesucht: Steigung der Tangente von G_f an der Stelle x_0



Differenzenquotient: $m_s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (Sekantensteigung)

Differenzialquotient: $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (Tangentensteigung)

Grafisches Differenzieren



6. Ableitungen der elementaren Funktionen und Ableitungsregeln (Analysis)

- $\big[x^s\big]' = s \cdot x^{s-1}$
- $\big[1/x^s\big]' = \big[x^{-s}\big]' = -s \cdot x^{-s-1} = \dfrac{-s}{x^{s+1}}$
- $\big[\sqrt{x}\big]' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\big[\mathrm{e}^x\big]' = \mathrm{e}^x$
- $\big[\ln x\big]' = 1/x$
- $\big[\sin(x)\big]' = \cos(x)$
- $\big[\cos(x)\big]' = -\sin(x)$

z. B. Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3\Big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{x\to x_0}\big(3x^2+3xh+h^2\big) = 3x_0^2$$

Summenregel: $\big[f(x)+g(x)\big]' = f'(x)+g'(x)$

Faktorregel: $\big[c\cdot f(x)\big]' = c\cdot f'(x)$

Produktregel: $\big[f(x)\cdot g(x)\big]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$[\sin(x)\cdot\sin(x)]' = \cos(x)\cdot\sin(x) + \sin(x)\cdot\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Quotientenregel: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$$\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x)+\sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

Kettenregel: $\big[f(g(x))\big]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$[\sin^2(x)]' = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$

7. Diskussion ganzrationaler Funktionen (Analysis)

Beispielfunktion: $f(x) = x^3 - 3x$

- *Definitionsbereich:* $\mathbb{R}$

- *Symmetrie:* $f(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$ ursprungssymmetrisch

- *asymptotisches Verhalten:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = \infty$$

- *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*

$$f(x) = 0 \qquad\qquad f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{3}$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \sqrt{3}$$

- *Ableitungen:*

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6$$

- *Extrempunkte:*

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad f''(-1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(-1, 2)$$

$$x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(1, -2)$$

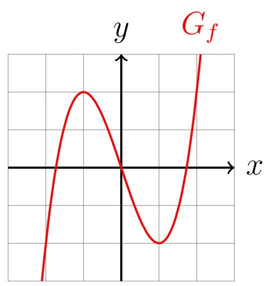
- *Wendepunkte:*

$$f''(x) = 0$$

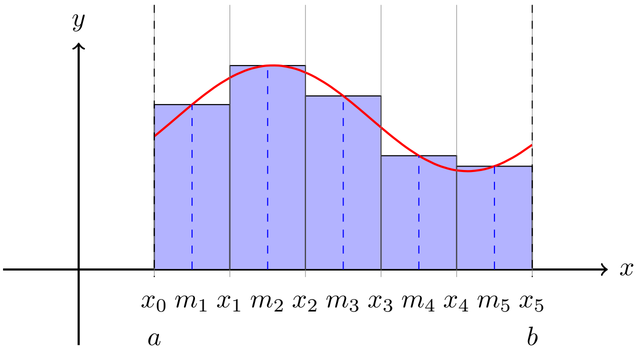
$$6x^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}(0, 0)$$

- *Graph:*



8. Das bestimmte Integral als Riemannsche Summe (Analysis) *Gegeben:* auf $I = [a, b]$ stetige Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$



Gesucht: Flächeninhalt von $M = \{(x, y)\colon a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$

Lösung:

(a) Zerlege $I = [a, b]$ in n äquidistante Teilintervalle der Breite $h = \dfrac{b-a}{n}$.

(b) Mittelpunkte der Teilintervalle: $m_i = a + (i - 0.5) \cdot h$

(c) Der Inhalt des i-ten Streifens wird durch ein Rechteck der Breite h und der Höhe $y_i = f(m_i)$ ersetzt.

$$A \approx h \cdot f(m_1) + h \cdot f(m_2) + \ldots + h \cdot f(m_n)$$

$$A \approx h\big[f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_n)\big]$$

$$A \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(m_i)$$

Wir definieren damit das *bestimmte Integral*:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(m_i) \right)$$

falls der Grenzwert rechts existiert. [Bei stetigen Funktionen ist dies immer der Fall.]

Rechenregeln:

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ für $a \leq b \leq c$

9. Integrationsregeln (Analysis)

- Summen und skalare Vielfache:

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

  [Das Integral ist ein lineares Funktional]

  Beispiel: $\int (3x^2 - \sin x)\,\mathrm{d}x = x^3 + \cos x + C$

- Partielle Integration (Herleitung für unbestimmtes Integral)

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int [f(x)g(x)]'\,\mathrm{d}x = \int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g(x)'\,\mathrm{d}x$$

  Beispiel: $\int \ln|x|\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln|x|\,\mathrm{d}x = \ldots$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 &&\Rightarrow\quad f(x) = x \\ g(x) &= \ln|x| &&\Rightarrow\quad g'(x) = 1/x \end{aligned}$$

$$\cdots = x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

- Substitutionsregel:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \ldots$$

  Substitution:

$$z = g(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = g'(x) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}z = g'(x)\,\mathrm{d}x$$

  $z_1 = g(x_1)$ für ein geeignetes x_1
  $z_2 = g(x_2)$ für ein geeignetes x_2

$$\cdots = \int_{x_1}^{x_2} f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

  v.r.n.l. interpretiert: Substitution vom Typ 1

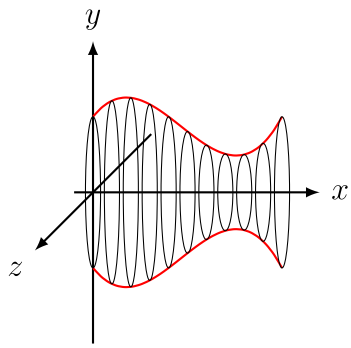
  v.l.n.r. interpretiert: Substitution vom Typ 2

  Beispiel: $\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$

$$u(x) = 1 + x^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

$$\cdots = \int \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| = \ln(1+x^2) + C$$

10. Volumenberechnung von Rotationskörpern (Analysis) Der Graph einer nicht-negativen (stetigen) Funktion über dem Intervall $I = [a, b]$ rotiert um die x-Achse. So entsteht ein *Rotationskörper R*.



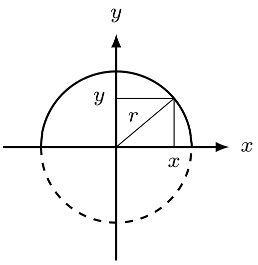
Volumenformel für diesen Rotationskörper:

$$V = \int_R \mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}V = \pi \cdot f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

Herleitung der Volumenformel für das Kugelvolumen:



$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = r^2 - x^2$$

$$V_{\text{Kugel}} = \pi \int_{-r}^{r} f(x)^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) = \frac{4\pi}{3}r^3$$

11. Produkte mit Vektoren und ihre Anwendung (Vektoren)

- s-Multiplikation: $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$
- Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}\,| \cdot |\vec{b}\,| \cdot \cos\varphi$

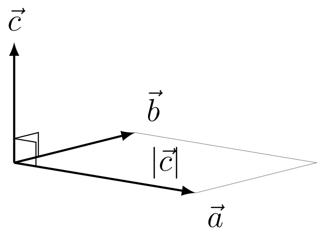
  Komponentendarstellung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

  Anwendungen:

  - Winkelberechnungen: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}\,| \cdot |\vec{b}\,|}$
  - physikalische Arbeit: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

- Vektorprodukt (Kreuzprodukt): $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

  Das Vektorprodukt ist *nicht kommutativ*. Insbesondere gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = -\big(\vec{b} \times \vec{a}\big)$

  - $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
  - $|\vec{c}\,|$ ist die Flächenmasszahl des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
  - $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein *Rechtssystem*

  Anwendungen:

  - Normalenvektoren (Koordinatengleichung der Ebene)
  - Flächenberechnung von Parallelogramm und Dreieck
  - Abstand Punkt–Gerade

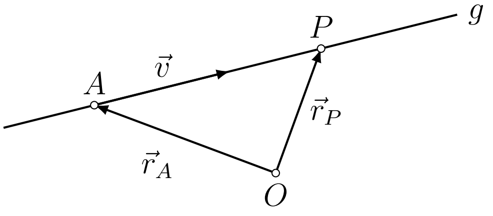
- Spatprodukt (gemischtes Produkt): $\big(\vec{a} \times \vec{b}\big) \cdot \vec{c}$

  Anwendungen:

  - Volumenberechnung von Spat $V_S = \big|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\big|$ und Tetraeder $V_T = \dfrac{1}{6} V_S$
  - Abstand Gerade–Gerade

12. Die Gerade im Raum (Vektoren)

Skizze:



Parametergleichung: $g\colon \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{v}$

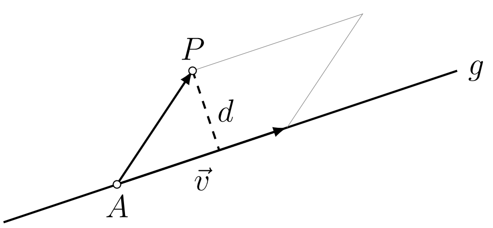
$P(x, y, z) \in g \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_P = \vec{r}_A + t\vec{v}$

Spurpunkte: Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen.
$S_1(x, y, 0)$: $0 = z_A + t \cdot z_v \Rightarrow t = z_A/z_v$ $(z_v \neq 0)$
Analog für $S_2(0, y, z)$ und $S_3(x, 0, z)$

Gegenseitige Lage von $g\colon \vec{r}_A + s\,\vec{u}$ *und* $h\colon \vec{r}_B + t\,\vec{v}$
Gleichungssystem: $\vec{r}_A + s\,\vec{u} = \vec{r}_B + t\,\vec{v}$

- genau eine Lösung: $g \cap h = \{S\}$
  Schnittwinkel: $\varphi = \arccos \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{u \cdot v}$
  Winkelhalbierende: $g\colon \vec{r} = \vec{r}_S + \dfrac{1}{|u|} \cdot \vec{u} \pm \dfrac{1}{|v|} \cdot \vec{v}$
- unendlich viele Lösungen: $g = h$
- keine Lösungen:
  - Die Richtungsvektoren sind kollinear: $g \parallel h$
  - Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear: g und h sind windschief
    Abstand: $\operatorname{dist}(g, h) = \dfrac{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$

Abstand Punkt-Gerade:

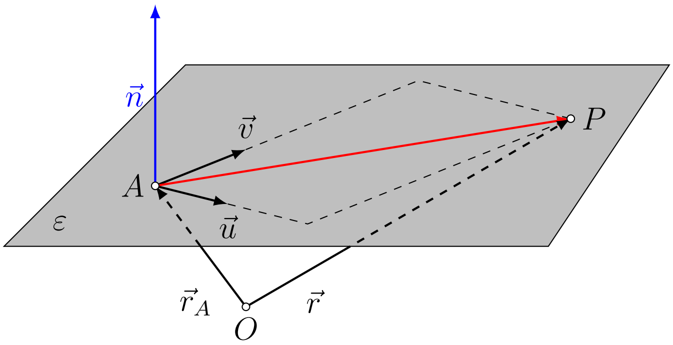


Berechne den Inhalt des von $\vec{v}$ und $\vec{AP}$ aufgespannten Parallelogramms auf zwei Arten:

$$\left|\vec{v}\right| \cdot d = \left|\vec{v} \times \vec{AP}\right| \quad \Rightarrow \quad d = \ldots$$

13. Die Ebene im Raum (Vektoren)

Skizze:



Eine Ebene im Raum kann wie folgt definiert werden:

- drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen,
- durch zwei sich schneidende Geraden,
- durch eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.

Parametergleichung: $\varepsilon\colon \vec{r} = \vec{r}_A + s\vec{u} + t\vec{v}$

Normalengleichung: $\varepsilon\colon \vec{n}\big(\vec{r} - \vec{r}_A\big) = 0$

Koordinatengleichung: $\varepsilon\colon ax + by + cz + d = 0$ mit $\vec{n} = (a, b, c)^\mathsf{T}$

Inzidenz: $P \in \varepsilon$, wenn x_P, y_P und z_P die Ebenengleichung von ε erfüllen.

Achsenabschnitte: $(a, 0, 0)$ in ε einsetzen und nach a auflösen. Analog für $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$

Achsenabschnittsform: $\varepsilon\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} - 1 = 0$

Winkel zwischen zwei Ebenen: $\angle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \arccos \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{n_1 \cdot n_2}$

Schnitt Gerade–Ebene: $g\colon \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{v}$ in die Normalenform $\vec{n}\big(\vec{r} - \vec{r}_B\big) = 0$ einsetzen und nach t auflösen.

Abstand Punkt–Ebene: $\mathrm{d}(P, \varepsilon) = \dfrac{ax_P + by_P + cz_P + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (HNF)

Winkelhalbierende Ebenen: $\mathrm{HNF}_1 = \pm\mathrm{HNF}_2$

Gegenseitige Lage zweier Ebenen:

- schneidend,
- parallel oder
- identisch

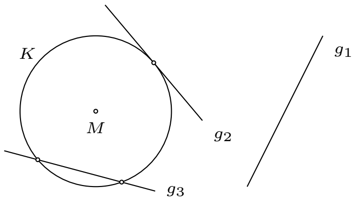
14. Die Sphäre (Vektoren)

Gleichung einer Sphäre: $K\colon (x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2=\varrho^2$

oder mit Skalarprodukt: $K\colon \left(\vec{r}_M-\vec{r}\right)^2=\varrho^2$

Gegenseitige Lage von Sphäre K und Gerade $g\colon \vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{v}$:

projizierende Darstellung

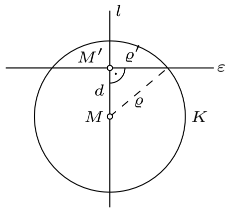


Setzt man $x=x_A+tx_v$, $y=y_A+ty_v$, $z=z_A+tz_v$ in die Gleichung von K ein, erhält man eine quadratische Gleichung.

Abhängig von der Anzahl der Lösungen *meidet/berührt/schneidet* g die Sphäre K.

Gegenseitige Lage von Sphäre K und Ebene $\varepsilon\colon ax+by+cz+d=0$:

projizierende Darstellung

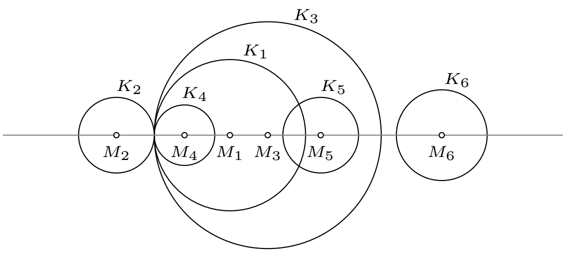


(1) $\mathrm{Lot}(M,\varepsilon)\to l$ (2) $l\cap\varepsilon\to M'$ (3) $|\overrightarrow{MM'}|\to d$ (4) $\varrho'=\sqrt{\varrho^2-d^2}$

Abhängig von der Anzahl Lösungen in (2) *meidet/berührt/schneidet* ε die Sphäre K.

Gegenseitige Lage zweier Sphären:

projizierende Darstellung



- $|\varrho_1-\varrho_2|<\overline{M_1M_2}<\varrho_1+\varrho_2$: Die Sphären *schneiden* sich.
- $|\varrho_1-\varrho_2|=\overline{M_1M_2}$ Die Sphären *berühren sich innen.*
- $\varrho_1+\varrho_2=\overline{M_1M_2}$ Die Sphären *berühren sich aussen.*
- $|\varrho_1-\varrho_2|>\overline{M_1M_2}$ Die Sphären *liegen ineinander.*
- $\varrho_1+\varrho_2<\overline{M_1M_2}$ Die Sphären *liegen auseineinander.*

15. Beschreibende Statistik (Stochastik)

Aufgaben der beschreibenden Statistik:

- tabellarische Darstellung der Daten
- graphische Darstellung der Daten
- Zusammenfassung der Daten durch Kennzahlen

Masse der zentralen Tendenz:

- *empririsches arithmetisches Mittel:* $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

  empirisch: auf einer Stichprobe beruhend

  $\overline{x}$ ist der beste Schätzer für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit.
- *Modus:* der häufigeste Wert
- *Median $\tilde{x}$:* ein Wert, der die sortierte Liste in zwei gleich grosse Teile zerlegt.
- *erstes und drittes Quartil Q_1, Q_3:* Median der unteren bzw. oberen Hälfte der sortierten Liste.

Masse der Streuung:

- *empirsche Varianz*: $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$

  s^2 ist der beste Schätzer für die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit.
- *empirische Standardabweichung:* $s = \sqrt{s^2}$
- *Spannweite:* $R = x_{\max} - x_{\min}$
- *Interquartilsabstand:* $\mathrm{IQR} = Q_3 - Q_1$

Beispiel: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$

empirischer Mittelwert: $\overline{x} = \frac{1}{4}(2 + 2 + 3 + 5) = 3$

Modus: 2

Median: $\tilde{x} = 2.5$

Quartile: $Q_1 = 2$, $Q_3 = 4$

empirische Varianz: $s^2 = \frac{1}{3}\left[(2-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2\right] = 2$

Spannweite: $R = 5 - 2 = 3$

IQR: $Q_3 - Q_1 = 4 - 2 = 2$

16. Kombinatorik (Stochastik)

Kombinatorik: Lösung von Abzählproblemen

Produktregel: Hat man bei einem n-stufigen Auswahlprozess in der k-ten Stufe m_k Möglichkeiten so gibt es insgesamt $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ Auswahlmöglichkeiten.

Summenregel: Besteht ein Abzählproblem aus n disjunkte Teilprobleme mit jeweils m_k Möglichkeiten, so gibt es insgesamt $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ Möglichkeiten.

Variationen: Auswahl von k Elementen aus einer Menge von n unterscheidbaren Objekten *mit* Berücksichtigung der Reihenfolge. (*engl. Permutation*)

(V1) ohne Zurücklegen:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(V2) mit Zurücklegen:

$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$$

Kombinationen: Auswahl von k Elementen aus einer Menge von n unterscheidbaren Objekten *ohne* Berücksichtigung der Reihenfolge.

(C1) ohne Zurücklegen:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

(C2) mit Zurücklegen:

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

Für die Herleitung stelle man sich vor, dass identische Elemente in Gruppen zusammengefasst und diese Gruppen in irgend einer festen Reihenfolge angeordnet sind (da sie ja keine Rolle spielt).

Die Grenzen zwischen den n (möglicherweise leeren) Gruppen ist durch die Wahl von $n-1$ Positionsnummern aus einer Menge von insgesamt $k+n-1$ möglichen Plätzen definiert.

Beispiel: Ziehung von 6 Elementen mit Zurücklegen aus einer Menge von 4 verschiedenen Objekten.

```
xx|x|xx|x
x|xxx||x|
.........
123456789
```

$$\binom{6+3}{3} = \binom{9}{3} = 84$$

17. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik)

Zufallsexperiment: Experiment, dessen Ausgang nicht vorhergesagt werden kann

Ergebnis: konkreter Ausgang eines Zufallsexperiments

Stichprobenraum: Menge aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments Ω

(Ω kann *abzählbar* oder *überabzählbar* sein.)

Ereignis: $E \subset \Omega$

- $\overline{E} = \Omega \setminus E$ ist das *Gegenereignis* von E
- Ω ist das *sichere Ereignis*
- $\emptyset$ ist das *unmögliche Ereignis*

Ist Ω abzählbar und ordnet man jedem Elementarereignis $\{\omega_i\}$ eine reelle Zahl $p(\omega_i)$ zu, so dass $\sum_i p(\omega_i) = 1$ gilt, so erhält man damit eine Funktion, die jeder Teilmenge $E \subset \Omega$ wie folgt eine Wahrscheinlichkeit zuordnet:

$$P(E) = \sum_{\omega_i \in E} p(\omega_i)$$

Die so definierte Funktion P erfüllt die Axiome von Kolmogoroff:

(K1) $\forall E \subset \Omega$: $P(E) \geq 0$

(K2) $P(\Omega) = 1$

(K3) für jede abzählbare Menge paarweise disjunkter Ereignisse $E_i \subset \Omega$ gilt:
$P\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i P(E_i)$

Ist Ω überabzählbar, so ist kann nicht mehr jeder Teilmenge $E \subset \Omega$ sinnvoll eine Zahl zugeordnet werden. Als Ereignismenge wird dann ein Mengensystem verwendet, das nur die Teilmengen enthält, die mit den Axiomen von Kolmogoroff verträglich sind.

Laplace-Formel:

Hat ein Zufallsexperiment n gleich wahrscheinliche Ergebnisse, so gilt für $E \subset \Omega$:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$$

Beispiele: Münzwurf, Doppelwurf mit Spielwürfel, ...

18. Elementare Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik)

Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beweis: Axiome von Kolmogoroff (Plausibilität an Venn-Diagramm aufzeigen)

bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Multiplikationssatz: $P(A \cap B) \overset{\text{MS}}{=} P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$

Beweis: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (1)$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (2)$$

Kettenregel (Verallgemeinerung des Multiplikationssatzes):

$$P(A \cap B \cap C) = P([A \cap B] \cap C) \overset{\text{MS}}{=} P(A \cap B) \cdot P(C|A \cap B) \overset{\text{MS}}{=} P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: ($\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots, \cup A_n$ disjunkt)

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)) \\ &= P\big((B \cap A_1) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)\big) \\ &= P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B \cap A_n) \end{aligned}$$

Satz von Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$

Beweis: Setze die rechten Seiten von (1) und (2) gleich und Löse nach $P(A|B)$ auf.

19. Die Binomialverteilung (Stochastik)

Ein *Bernoulli-Experiment* ist ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ergebnissen.

Beispiel: Münzwurf

Eine *Zufallsvariable* (ZV) ist eine Funktion, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zuordnet.

Eine *Bernoulli-ZV* ordnet den beiden Ergebnissen eines Bernoulli-Experiments die Zahlen 1 (Erfolg) und 0 (Misserfolg) zu. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten werden mit p und $1-p$ beichnet.

Eine *Bernoulli-Kette der Länge n* ist ein Zufallsexperiment, das aus n Durchführungen eines Bernoulli-Experiments besteht.

Satz von Bernoulli: Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Bernoulli-Kette der Länge n genau k Erfolge zu erzielen beträgt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

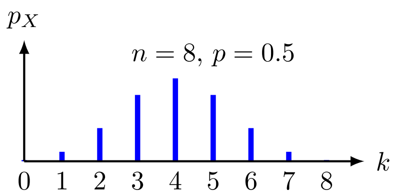
Eine Zufallsvariable X mit dieser Eigenschaft wird *binomialverteilt* genannt.4

Plausibilität der Formel: $n = 5$ Wiederholungen, $k = 2$ Erfolge, $n - k = 3$ Misserfolge:

$P(1,1,0,0,0) = p^2(1-p)^3$, $P(1,0,1,0,0) = p^2(1-p)^3$, ...

Es gibt $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ Möglichkeiten, die 2 Erfolge auf 5 „Plätze" zu verteilen.

Stabdiagramm der Verteilung:



Eigenschaften der Binomialverteilung

- *diskret:* Ω ist abzählbar
- *Erwartungswert eines Bernoulli-Experiments:*

  $\mathrm{E}(X_i) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$

  Erwartungswert einer Bernoulli-Kette:

  $\mathrm{E}(X) \overset{(*)}{=} \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = np$
- *Varianz einens Bernoulli-Experiments:*

  $\mathrm{Var}(X_i) = p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot (0-p)^2 = p(1 - 2p + p^2) + (1-p)p^2$

  $\quad = p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3 = p - p^2 = p(1-p)$

  Varianz einer Bernoulli-Kette:

  $\mathrm{Var}(X) \overset{(**)}{=} \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = np(1-p)$
- *Standardabweichung:* $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$

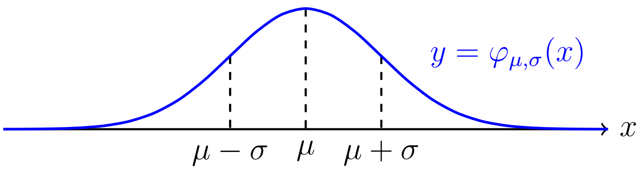
Rechenregeln: $(*)$ $\mathrm{E}(aX + bY) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)$ $\quad(**)$ $\mathrm{Var}(aX + bY + c) = a^2\,\mathrm{Var}(X) + b^2\,\mathrm{Var}(Y)$

20. Die Normalverteilung (Stochastik)

Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariablen X mit den Parametern μ und σ:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Graph:



μ: Hochstelle; $\mu \pm \sigma$: Wendestellen

Spezialfall: $\mu = 0$ und $\sigma = 1$: *Standardnormalverteilung*

Eigenschaften:

- X ist *stetige* ZV, da Ω überabzählbar ist.
- φ ist *Wahrscheinlichkeitsdichte*, d. h. es gilt:
  $\varphi(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- *(kumulative) Verteilungsfunktion:* $\Phi(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$
- *Wahrscheinlichkeit:* $P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- *Erwartungswert:* $\mathrm{E}(X) = \mu$
- *Varianz:* $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- *Sigma-Regeln:*
  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68.3\%$
  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.4\%$
  $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\%$