Komplexe Zahlen Theorie und Aufgaben

1 Einführung

1.1 Zahlenbereichserweiterungen

Die Menge der natürlichen Zahlen

Der „natürliche Zählprozess“ führt zu Mengen der folgenden Form:

oder

In $\mathbb{N}$ können wir beispielsweise Gleichungen der Art

$x - 7 = 0$

lösen.

Die Menge der ganzen Zahlen

Bildet man zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ihre Gegenzahl $-n$, und vereinigt die so entstandene Menge mit $\mathbb{N}$, so erhält man die *Menge der ganzen Zahlen*:

In $\mathbb{Z}$ können wir beispielsweise Gleichungen vom Typ

$x - 7 = 0$

oder

$x + 7 = 0$

lösen.

Die Menge der rationalen Zahlen

Die Menge aller Brüche p/q mit aus einem Zähler $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, nennt man die Menge der *rationalen Zahlen*:

Die schriftliche Division zweier ganzer Zahlen lehrt uns, dass das Resultat entweder eine endliche ($5/4 = 1.25$) oder eine nicht endliche aber periodische Darstellung ($2/3 = 0.666\ldots$) besitzt.

In $\mathbb{Q}$ können wir beispielsweise Gleichungen der Form

$5x - 7 = 0 \quad$ oder $\quad 5x + 7 = 0$

lösen.

Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Untersuchen wir die Grenzwerte von Folgen in $\mathbb{Q}$, so erhalten wir einen neuen Typ von Zahlen.

Beispiel 1.1

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right) =$

$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{3}{x_2}\right) =$

$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{3}{x_3}\right) =$

$x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{3}{x_4}\right) =$

$\ldots \lim_{n\to\infty} x_n =$

Beispiel 1.2

$x_1 = 2$

$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} =$

$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} =$

$x_4 = x_3 + \frac{1}{4!} =$

$x_5 = x_4 + \frac{1}{5!} =$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e} \approx 2.7181828\ldots$

Die Menge der reellen Zahlen

Die neuen Zahlen, die wir durch den oben beschriebenen Prozess erhalten, werden *irrationale Zahlen* genannt. Fügen wir sie zu den rationalen Zahlen hinzu, sprechen wir von den *rellen Zahlen*. Für sie gibt es eine einfache Beschreibung:

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist eine abbrechende oder nichtabbrechende Dezimalzahl}\}$

In $\mathbb{R}$ können wir beispielsweise Gleichungen der Form

$x^2 - 2 = 0$

lösen.

Die imaginäre Einheit

Eine Art von Gleichung können wir jedoch mit den bisher bekannten Zahlen nicht lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

Trick: Wir geben der Zahl, die die Gleichung oben löst, einen Namen.

Damit können wir die Gleichung lösen:

imaginäre Zahlen

Relle Vielfache von i werden *imaginäre Zahlen* genannt.

Beispiele für imaginäre Zahlen:

- $5\,\mathrm{i}$
- $-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

Komplexe Zahlen

Addiert man zu einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ die imaginäre Zahl $b\,\mathrm{i}$, so entsteht eine *komplexe Zahl* z:

$$z = a + b\,\mathrm{i}$$

a heisst *Realteil* und b *Imaginärteil* von z.

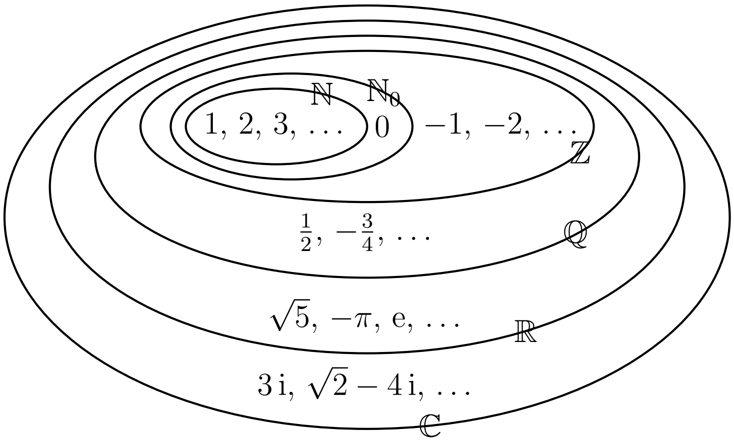
Achtung: a und b sind beide *reell*!

$\mathbb{C} = \{a + b\,\mathrm{i} \colon a \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R}\}$

Beispiel 1.4

	z	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3\,\mathrm{i}$		
(b)	$7 - \frac{3}{4}\,\mathrm{i}$		
(c)	$-\pi$		
(d)	$5.2\,\mathrm{i}$		

Das Gesamtbild



1.2 Rechenregeln

Allgemeines

Grundsätzlich gilt beim Rechnen mit komplexen Zahlen:

- Behandle die imaginären Einheit i wie eine „normale“ Variable.
- Ersetze i^2 durch -1.

Addition

$(5 + 3\,\mathrm{i}) + (7 - 4\,\mathrm{i}) =$

Subtraktion

$(9 - \mathrm{i}) - (6 + 2\,\mathrm{i}) =$

Multiplikation

$(5 - 2\,\mathrm{i})(2 + 3\,\mathrm{i}) =$

Division

$\frac{16+11\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} =$

Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ anstelle von $\mathrm{i}^2 = -1$. Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

Um das zu vermeiden, merkt man sich:

i ist diejenige Zahl, deren Quadrat -1 ergibt.

Anwendung

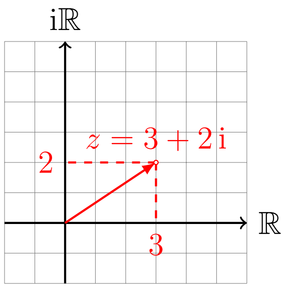
Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$x^2 - 6x + 13 = 0$

Diskriminante:

1.3 Geometrische Deutung

Auf C. F. Gauss (1777–1855) geht die Darstellung einer komplexen Zahl $z = a + b\,\mathrm{i}$ als Punkt (a, b) in der *komplexen Zahlenebene* (oder *Gaussschen Zahlenebene*) zurück.

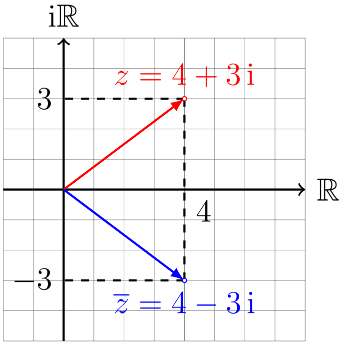


1.4 Die konjugiert komplexe Zahl

Ist $z = a + b\,\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl, so ist die *konjugiert komplexe Zahl* $\overline{z}$ definiert durch:

$$\overline{z} = a - b\,\mathrm{i}$$

In der Gaussschen Zahlenebene entsteht $\overline{z}$ durch Spiegelung von z an der reellen Achse.

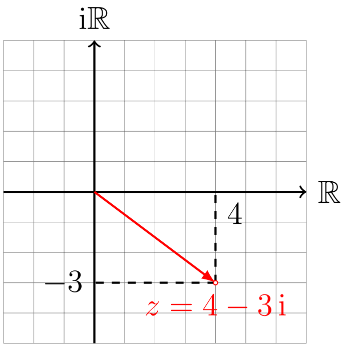


1.5 Der Betrag einer komplexen Zahl

Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl z ist definiert durch:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

In der Gaussschen Zahlenebene entspricht der Betrag $|z|$ dem Abstand des Punkts z vom Ursprung.



$$|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Bemerkung: Komplexe Zahlen lassen sich nicht wie reelle Zahle der Grösse nach ordnen. Oder welche der Zahlen $5 + 3\,\mathrm{i}$ bzw. $2 + 6\,\mathrm{i}$ soll die grössere sein?

2 Übungen

Aufgabe 1.1

In welchen der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ist die Gleichung *nicht* erfüllbar?

(a) $x + 3 = 8$

(b) $x + 7 = 7$

(c) $3x = 12$

(d) $4x = 11$

(e) $8x + 36 = 0$

(f) $7x + 12 = 0$

(g) $x^2 = 4.41$

(h) $x^2 = 5$

(i) $x^2 + 9 = 0$

(j) $(x - 1)(x + 2)(2x - 1)(x^2 - 3) = 0$

Aufgabe 1.2

Löse in der Grundmenge $\mathbb{C}$.

(a) $x^2 = -25$ (b) $2x^2 + 32 = 0$ (c) $x^2 = -5$ (d) $16x^2 + 49 = 0$

Aufgabe 1.3

Welche Aussagen sind wahr?

(a) 2 ist eine natürliche Zahl.

(b) 2 ist eine komplexe Zahl.

(c) $\sqrt{3}$ ist eine rationale Zahl.

(d) $3 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ ist eine reelle Zahl.

(e) $-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ ist eine imaginäre Zahl.

(f) π ist eine irrationale Zahl.

Aufgabe 1.4

(a) $(8 + 2\,\mathrm{i}) + (7 + 3\,\mathrm{i})$

(b) $(11 - 15\,\mathrm{i}) + (-3 + 8\,\mathrm{i})$

(c) $(1 + 10\,\mathrm{i}) - (5 - 13\,\mathrm{i})$

(d) $25\,\mathrm{i} - (-8 + \mathrm{i})$

Aufgabe 1.5

(a) $8 \cdot 5\,\mathrm{i}$

(b) $8\,\mathrm{i} \cdot 5\,\mathrm{i}$

(c) $5(6 - 9\,\mathrm{i})$

(d) $(-7 - 12\,\mathrm{i})5\,\mathrm{i}$

(e) $-\mathrm{i}(14 + 5\,\mathrm{i})$

(f) $(8 + 2\,\mathrm{i})(7 + 3\,\mathrm{i})$

Aufgabe 1.6

Bestimme die Gegenzahl $-z$ von z.

(a) $z = 3 + 5\,\mathrm{i}$ (b) $z = -\mathrm{i}$ (c) $z = 15$ (d) $z = -8 + 11\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.7

Bestimme die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ von z.

(a) $z = -3 + 8\,\mathrm{i}$ (b) $z = 2 - 3\,\mathrm{i}$ (c) $z = 3$ (d) $z = 2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.8

Vereinfache so weit wie möglich.

(a) $(-\mathrm{i})^2$ (b) $\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3$ (c) $\mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^6$ (d) $(-2\mathrm{i})^3 + 5\mathrm{i}$

Aufgabe 1.9

Beweise die folgenen Aussagen.

(a) $(z + \overline{z}) \in \mathbb{R}$ (b) $(z \cdot \overline{z}) \in \mathbb{R}$

Aufgabe 1.10

Berechne und stelle das Resultat in der Normalform dar.

(a) $12\,\mathrm{i} : 3$ (b) $15 : 5\,\mathrm{i}$ (c) $(4 + 6\,\mathrm{i}) : 2$ (d) $(4 + 6\,\mathrm{i}) : 2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.11

Berechne z^{-1} und gib das Resultat in der Normalform an.

(a) $z = 2 + \mathrm{i}$ (b) $z = 4 + 3\,\mathrm{i}$ (c) $z = -24 - 7\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.12

Berechne und stelle das Resultat in der Normalform dar.

(a) $\dfrac{5 + 3\,\mathrm{i}}{2 + 4\,\mathrm{i}}$ (b) $\dfrac{63 + 16\,\mathrm{i}}{4 + 3\,\mathrm{i}}$ (c) $\dfrac{56 + 33\,\mathrm{i}}{12 - 5\,\mathrm{i}}$ (d) $\dfrac{13 - 5\,\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$

Aufgabe 1.13

Stelle in der Normalform dar.

(a) $\dfrac{7}{\sqrt{2} - \sqrt{5}\,\mathrm{i}}$ (b) $\dfrac{4\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}\,\mathrm{i}}$ (c) $\dfrac{4 + \sqrt{2}\,\mathrm{i}}{\sqrt{2} - 4\,\mathrm{i}}$

Aufgabe 1.14

Berechne.

(a) i^n für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

(b) i^n für $n = -1, -2, -3, -4$

(c) i^n für $n = 17, 50, 91, 236$

(d) i^n für $n = -27, -61, -100, -50$

Aufgabe 1.15

Berechne mit $z_1 = 5 + 2\,\mathrm{i}$ und $z_2 = -3 + 5\,\mathrm{i}$

(a) $\operatorname{Re} \dfrac{z_1}{z_2}$

(b) $\dfrac{\operatorname{Re} z_1}{\operatorname{Re} z_2}$

(c) $\operatorname{Im} \dfrac{z_2}{z_1 - z_2}$

Aufgabe 1.16

Berechne für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(a) $(a - 2b\,\mathrm{i}) - (3a + 4c\,\mathrm{i})$

(b) $(7a + 3b\,\mathrm{i})(4c - d\,\mathrm{i})$

(c) $\dfrac{a + b\,\mathrm{i}}{c - d\,\mathrm{i}}$

(d) $\mathrm{i}(a + b\,\mathrm{i}) + \dfrac{1}{\mathrm{i}}(a - b\,\mathrm{i})$

Aufgabe 1.17

Berechne für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(a) $a\,\mathrm{i}(2b + 3c\,\mathrm{i}) - \dfrac{a}{\mathrm{i}}(2b - 3c\,\mathrm{i})$

(b) $\overline{(b - c\,\mathrm{i})}(b - c\,\mathrm{i})^{-1}$

(c) $\dfrac{a + b\,\mathrm{i}}{3c + d\,\mathrm{i}} - \dfrac{a - b\,\mathrm{i}}{3c - d\,\mathrm{i}}$

(d) $a\,\mathrm{i} + \overline{\dfrac{1}{a}\,\mathrm{i}} + \dfrac{a}{\mathrm{i}} + \dfrac{\mathrm{i}}{a}$

Aufgabe 1.18

(a) $\displaystyle\sum_{k=11}^{14} \mathrm{i}^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{50} \mathrm{i}^k$

(c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{25} \mathrm{i}^k$

Aufgabe 1.19

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{21} \mathrm{i}^{2k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{\mathrm{i}^k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{21} (-\mathrm{i})^{-3k}$

Aufgabe 1.20

Für welche komplexen Zahlen z gilt:

(a) $z = \overline{z}$

(b) $z = -z$

(c) $z = z^{-1}$

(d) $-\overline{z} = \overline{-z}$

(e) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\overline{z})$

(f) $\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(-z) = 0$

(g) $-z^{-1} = (-z)^{-1}$

(h) $\overline{-z^{-1}} = -\left(\overline{z}\right)^{-1}$

(i) $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}\left(\overline{z}\right)$

Aufgabe 1.21

Berechne die folgenden Terme.

(a) $\overline{(2+3\,\mathrm{i}) + (4-7\,\mathrm{i})}$

(b) $\overline{(-1+2\,\mathrm{i}) \cdot (3-3\,\mathrm{i})}$

(c) $\overline{(6+4\,\mathrm{i})} - (\overline{5+3\,\mathrm{i}})$

(d) $\overline{(18-\mathrm{i})} : \overline{(4-3\,\mathrm{i})}$

Aufgabe 1.22

Vereinfache die folgenden Terme (a, $b \in \mathbb{C}$).

(a) $\overline{a+\overline{b}} - \left(\overline{a}+b\right)$

(b) $\overline{\overline{a}\,b} \cdot \overline{\left(\overline{a}/b\right)}$

(c) $\overline{\left(a\,\overline{b}\right)^3} \cdot \overline{(b:a)^3}$

(d) $\left(\overline{a+b}\right) \cdot a - \overline{b} \cdot \left(\overline{a}+b\right)$

Aufgabe 1.23

Berechne die Beträge möglichst geschickt.

(a) $\left|(3+4\,\mathrm{i})(5-7\,\mathrm{i})\right|$

(b) $\left|(3+4\,\mathrm{i}) + (5-7\,\mathrm{i})\right|$

(c) $\left|(2+3\,\mathrm{i})^2\right|$

(d) $\left|(21+220\,\mathrm{i}) : (12+5\,\mathrm{i})\right|$

(e) $\left|(7+16\,\mathrm{i}) - (12-4\,\mathrm{i})\right|$

(f) $\left|(1+\mathrm{i})^7\right|$

Aufgabe 1.24

Handelt es sich um eine reelle oder rein imaginäre Zahl?

(a) $z - \overline{z}$

(b) $z \cdot \overline{z}$

(c) $\dfrac{\overline{z}}{z} - \dfrac{z}{\overline{z}}$

(d) $\mathrm{i}\,z - \mathrm{i}\,\overline{z}$

(e) $\mathrm{i}\,z + \mathrm{i}\,\overline{z}$

(f) $\dfrac{z+\overline{z}}{2z\overline{z}}$

Aufgabe 1.25

Vereinfache die Terme.

(a) $|z+2\,\mathrm{i}|^2 + 4\,\operatorname{Im}\left(\overline{z}\right)$

(b) $\operatorname{Re}\left(8\,\mathrm{i}\,\overline{z}\right) + |z-3\,\mathrm{i}|^2 - |z+\mathrm{i}|^2$

(c) $|3z+4\,\mathrm{i}|^2 + |4\overline{z}+3\,\mathrm{i}|^2 - |5z|^2$

Aufgabe 1.26

Beweise.

(a) $|z|^2 = 2\,\mathrm{Re}^2(z) - \mathrm{Re}(z^2)$

(b) $|z + \mathrm{i}\,\overline{z}|^2 = 2|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}(z^2)$

3 Lösungen

Aufgabe 1.1

(a) —

(b) $\mathbb{N}$

(c) —

(d) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

(e) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

(f) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

(g) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

(h) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

(i) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

(j) —

Aufgabe 1.2

(a) $L = \{-5\,\mathrm{i}, 5\,\mathrm{i}\}$

(b) $L = \{-4\,\mathrm{i}, 4\,\mathrm{i}\}$

(c) $L = \{-\sqrt{5}\,\mathrm{i}, \sqrt{5}\,\mathrm{i}\}$

(d) $L = \{-\frac{7}{4}\,\mathrm{i}, \frac{7}{4}\,\mathrm{i}\}$

Aufgabe 1.3

(a) wahr

(b) wahr

(c) falsch

(d) falsch

(e) wahr

(f) wahr

Aufgabe 1.4

(a) $15 + 5\,\mathrm{i}$

(b) $8 - 7\,\mathrm{i}$

(c) $-4 + 23\,\mathrm{i}$

(d) $8 + 24\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.5

(a) $40\,\mathrm{i}$

(b) -40

(c) $30 - 45\,\mathrm{i}$

(d) $60 - 35\,\mathrm{i}$

(e) $5 - 14\,\mathrm{i}$

(f) $50 + 38\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.6

(a) $-3 - 5\,\mathrm{i}$

(b) i

(c) -15

(d) $8 - 11\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.7

(a) $-3 - 8\,\mathrm{i}$

(b) $2 + 3\,\mathrm{i}$

(c) 3

(d) $-2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.8

(a) -1

(b) $-1 - \mathrm{i}$

(c) 0

(d) $13\mathrm{i}$

Aufgabe 1.9

(a) mit dem Ansatz $z = a + b\,\mathrm{i}$ durchrechnen

(b) mit dem Ansatz $z = a + b\,\mathrm{i}$ durchrechnen

Aufgabe 1.10

(a) $4\,\mathrm{i}$ (b) $-3\,\mathrm{i}$ (c) $2 + 3\,\mathrm{i}$ (d) $3 - 2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.11

(a) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\,\mathrm{i}$ (b) $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}\,\mathrm{i}$ (c) $\frac{-24}{625} + \frac{7}{625}\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.12

(a) $1.1 - 0.7\,\mathrm{i}$ (b) $12 - 5\,\mathrm{i}$ (c) $3 + 4\,\mathrm{i}$ (d) $9 + 4\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.13

(a) $\sqrt{2} + \sqrt{5}\,\mathrm{i}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$ (c) i

Aufgabe 1.14

(a) $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$, $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^6 = -1$, $\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^8 = 1$

(b) $\mathrm{i}^{-1} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{-2} = \mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^{-3} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{-4} = \mathrm{i}^0 = 1$

(c) $\mathrm{i}^{17} = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{50} = -1$, $\mathrm{i}^{91} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{236} = 1$

(d) $\mathrm{i}^{-27} = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{-61} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{-100} = 1$, $\mathrm{i}^{-50} = -1$

Aufgabe 1.15

(a) $-\frac{5}{34}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{31}{73}$

Aufgabe 1.16

(a) $-2a + (-2b - 4c)\,\mathrm{i}$

(b) $28ac + 3bd + (12bc - 7ad)\,\mathrm{i}$

(c) $\frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad + bc}{c^2 + d^2}\,\mathrm{i}$

(d) $-2b$

Aufgabe 1.17

(a) $4ab\,\mathrm{i}$

(b) $\dfrac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} + \dfrac{2bc}{b^2 + c^2}\,\mathrm{i}$

(c) $\dfrac{6bc - 2ad}{9c^2 + d^2}\,\mathrm{i}$

(d) 0

Aufgabe 1.18

(a) 0 (b) $-1 + \mathrm{i}$ (c) i

Aufgabe 1.19

(a) 0 (b) $-1 - \mathrm{i}$ (c) $-\mathrm{i}$

Aufgabe 1.20

(a) $z \in \mathbb{R}$

(b) $z = 0$

(c) $z = 1$ oder $z = -1$

(d) $z \in \mathbb{C}$

(e) $z \in \mathbb{C}$

(f) $z \in \mathbb{C}$

(g) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(h) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(i) $z \in \mathbb{R}$

Aufgabe 1.21

(a) $6 + 4\mathrm{i}$ (b) $3 - 9\,\mathrm{i}$ (c) $1 - \mathrm{i}$ (d) $3 - 2\mathrm{i}$

Aufgabe 1.22

(a) 0 (b) a^2 (c) $|b|^6$ (d) $|a|^2 - \overline{b}^2$

Aufgabe 1.23

(a) $5\sqrt{74}$ (b) $\sqrt{73}$ (c) 13 (d) 17 (e) $5\sqrt{17}$ (f) $8\sqrt{2}$

Aufgabe 1.24

(a) imaginär

(b) reell

(c) imaginär

(d) reell

(e) imaginär

(f) reell

Aufgabe 1.25

(a) $|z|^2 + 4$ (b) 8 (c) 25

Aufgabe 1.26

(a) Linke Seite = rechte Seite: $x^2 + y^2$

(b) Linke Seite = rechte Seite: $2(x + y)^2$