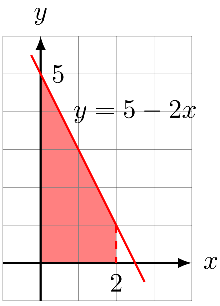
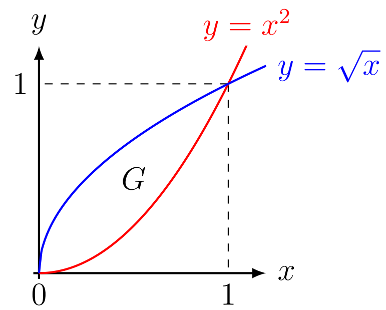
Aufgabe 9.1



$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^{5-2x} 30x^2 y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x &= \int_0^2 \left[15x^2y^2\right]_0^{5-2x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \left(15x^2(5-2x)^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 15x^2(25-20x+4x^2) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 (60x^4 - 300x^3 + 375^2) \, \mathrm{d}x \\ &= \left[12x^5 - 75x^4 + 125x^3\right]_0^2 \\ &= 384 - 1200 + 1000 \\ &= 184\end{aligned}$$

Aufgabe 9.2



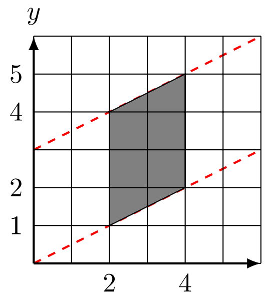
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x}{y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left[x \ln y\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_0^1 x\big(\ln x^{\frac{1}{2}} - \ln x^2\big) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x \ln x^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x = -\frac{3}{2} \int_0^1 x \ln x \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

oder:

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2y}\right]_{y^2}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^3}{2}\right) \mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Aufgabe 9.3

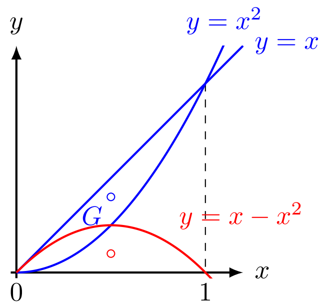


(a) $\displaystyle\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}G = \int_2^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}x+3} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}G = \int_1^2 \int_2^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\displaystyle+ \int_2^4 \int_2^4 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_4^5 \int_{2y-6}^4 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Aufgabe 9.4



Vorsicht: Wer mit der der Differenzfunktion $y = x - x^2$ und Formel aus dem Formelbuch rechnet, erhält den Schwerpunkt der Differenzfläche, die bündig an der x-Achse liegt („toter Wal“). Deshalb müssen wir auf die Schwerpunktdefinition zurückgreifen:

$$x_s = \frac{1}{A}\iint_A x\,\mathrm{d}A \quad \text{und} \quad y_s = \frac{1}{A}\iint_A y\,\mathrm{d}A$$

Da bei der Berechnung von A die Lage der Fläche im Koordinatensystem keine Rolle spielt, kann auch „einfach“ über die Differenzfunktion $y = x - x^2$ integriert werden:

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$x_s = 6\int_0^1 \int_{x^2}^x x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 6\int_0^1 [xy]_{x^2}^x \,\mathrm{d}x$$
$$= 6\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) \mathrm{d}x = 6\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$
$$y_s = 6\int_0^1 \int_{x^2}^x y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 6\int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^x \mathrm{d}x$$
$$= 3\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = 3\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = 3 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{5}$$

Flächenschwerpunkt: $S(0.5, 0.4)$

Aufgabe 9.5

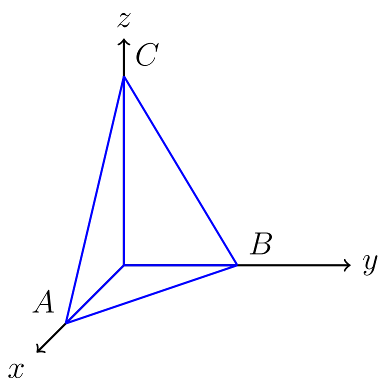
$$\iiint_V \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (1+x+y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \left[z + xz + yz + \frac{1}{2}z^2\right]_0^1 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{3}{2} + x + y\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{3}{2}y + xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 (2+x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[2x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 2.5$$

$\Rightarrow \quad m = 2.5$ kg

Aufgabe 9.6

$$\int_0^6\int_2^4\int_1^3 x^2yz^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^6 x^2 \int_2^4 y \int_1^3 z^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^6 x^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_2^4 y\,\mathrm{d}y \cdot \int_1^3 z^3\,\mathrm{d}z$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^6 \cdot \left[\frac{1}{2}y^2\right]_2^4 \cdot \left[\frac{1}{4}z^4\right]_1^3$$
$$= 72 \cdot 6 \cdot 20 = 8640$$

Aufgabe 9.7



$\varepsilon(ABC)\colon \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{5}z - 1 = 0$ (Achsenabschnittsform)

- z-Integration: von $z = 0$ bis $z = 5 - \frac{5}{4}x - \frac{5}{3}y$
- y-Integration: von $y = 0$ bis $y = 3 - \frac{3}{4}x$
- x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 4$

$$\iiint_V 1 \, \mathrm{d}V = \int_0^4 \int_0^{3-\frac{3}{4}x} \int_0^{5-\frac{5}{4}x-\frac{5}{3}y} 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^4 \int_0^{3-\frac{3}{4}x} \left[z\right]_0^{5-\frac{5}{4}x-\frac{5}{3}y} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^4 \int_0^{3-\frac{3}{4}x} \left(5 - \frac{5}{4}x - \frac{5}{3}y\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

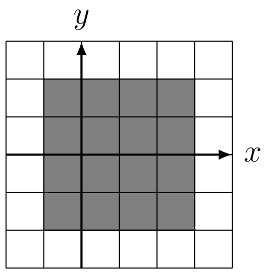
$$= \int_0^4 \left[5y - \frac{5}{4}xy - \frac{5}{6}y^2\right]_0^{3-\frac{3}{4}x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^4 \left(\left(15 - \frac{15}{4}x\right) - \left(\frac{15}{4}x - \frac{15}{16}x^2\right) - \left(\frac{15}{2} - \frac{15}{4}x + \frac{15}{32}x^2\right)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{15}{2} - \frac{15}{4}x + \frac{15}{32}x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{15}{2}x - \frac{15}{8}x^2 + \frac{5}{32}x^3\right]_0^4 = 30 - 30 + 10 = 10$$

Aufgabe 9.8



$$\int_{-1}^{3}\int_{-2}^{2} xy^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^{3} \left[\frac{1}{3}xy^3\right]_{-2}^{2} dx = \int_{-1}^{3} \frac{16}{3}x \, dx$$
$$= \left[\frac{8}{3}x^2\right]_{-1}^{3} = \frac{64}{3}$$

Aufgabe 9.9

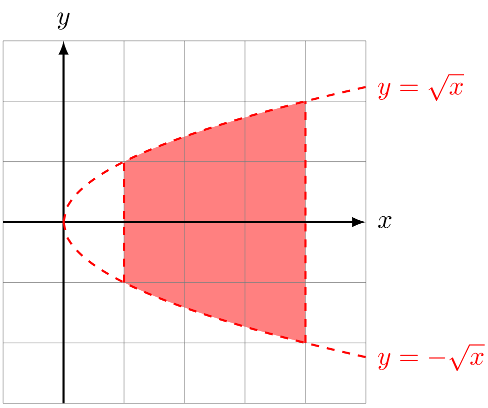
- y-Integration: von $y = 0$ bis $y = 1 - x$
- x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 1$

$$I = \iint_A S(x,y) \, dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} kx^2y^2 \, dy \, dx$$
$$= k \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x} dx = \frac{k}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3 \, dx$$
$$= \frac{k}{3}\int_0^1 \left(x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5\right) dx$$
$$= \frac{k}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{k}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{180}k$$

Gesamtstrom: $I = \dfrac{1}{180}k$

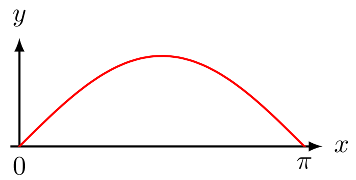
Aufgabe 9.10

$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 4, y^2 \le x\right\}$



$$\int_1^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (5x+2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \left[5xy+y^2\right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^4 \left(5x\sqrt{x}+x-[-5x\sqrt{x}+x]\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^4 10x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[4x^{\frac{5}{2}}\right]_1^4 \mathrm{d}x$$
$$= 128-4$$
$$= 124$$

Aufgabe 9.11



$$A = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^\pi = -(-1)-(-1) = 2$$

$$x_S = \frac{\pi}{2} \text{ (Symmetrie)}$$

$$y_S = \frac{1}{2A}\int_0^\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)\right]_0^\pi = \frac{1}{8}\big((\pi-0)-(0-0)\big) = \frac{\pi}{8}$$

$S\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{8}\right)$

Aufgabe 9.12

$$
\begin{aligned}
J &= \varrho \iiint_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}K = \varrho \int_{-1}^{1}\int_0^3 \int_0^2 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \varrho \int_{-1}^{1}\int_0^3 (x^2+y^2)\big[z\big]_0^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \varrho \int_{-1}^{1}\int_0^3 (x^2+y^2)\cdot 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\varrho \int_{-1}^{1} \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^3 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\varrho \int_{-1}^{1} \big(3x^2+9\big)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\varrho \left[x^3+9x\right]_{-1}^{1} = 2\varrho\big(10-(-10)\big) = 40\varrho
\end{aligned}
$$