1. $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$

   (a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

   (b) *Symmetrie:*
   $f(-x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = f(x) \Rightarrow$ ordinatensymmetrisch

   (c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (x-Achse ist Asymptote)

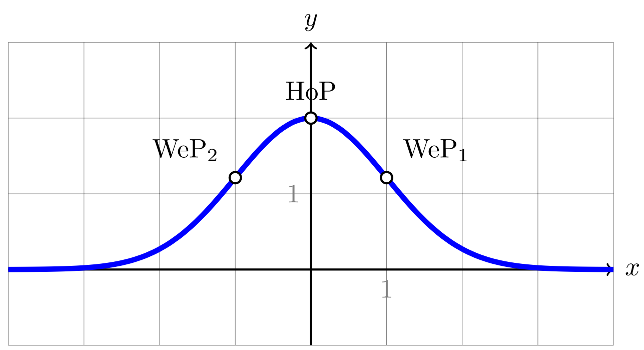
   (d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*
   $2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen
   $f(0) = 2\mathrm{e}^0 = 2$

   (e) *Ableitungen:*
   $$\begin{aligned} f(x) &= 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\ f'(x) &= 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = -2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\ f''(x) &= -2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + (-2x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = (2x^2 - 2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\ f'''(x) &= 4x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + (2x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = (6x - 2x^3)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

   (f) *Extremstellen:*
   Kandidaten:
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$
   Test: $f''(0) = (-2)\mathrm{e}^0 = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ist Hochstelle
   y-Koordinate: $f(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(0|2)$

   (g) *Wendepunkte:*
   Kandidaten:
   $$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (2x^2 - 2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} &= 0 \\ 2(x^2 - 1) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$
   Test: $f'''(1) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ ist Wendestelle
   y-Koordinate: $f(1) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}_1(1|1.21)$
   Symmetrie $\quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}_2(-1|1.21)$

   (h) *Graph:*



2. $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$

   (a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

   (b) *Symmetrie:*
   $f(-x) = (-x-1)\mathrm{e}^{x} \neq f(x)$
   $-f(-x) = (x+1)\mathrm{e}^{x} \neq f(x)$
   $\Rightarrow$ weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

   (c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (x-Achse ist Asymptote)

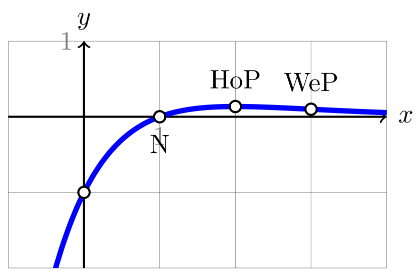
   (d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*
   $(x-1)\mathrm{e}^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1$
   $f(0) = \mathrm{e}$

   (e) *Ableitungen:*
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\mathrm{e}^{-x} \\ f'(x) &= 1\cdot\mathrm{e}^{-x} + (x-1)\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot(-1) = (x-2)\mathrm{e}^{-x} \\ f''(x) &= 1\cdot\mathrm{e}^{-x} + (x-2)\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot(-1) = (x-3)\mathrm{e}^{-x} \\ f'''(x) &= 1\cdot\mathrm{e}^{-x} + (x-3)\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot(-1) = (x-4)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

   (f) *Extremstellen:*
   Kandidaten:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (x-1)\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$
   Test: $f''(0) = (1-2)\mathrm{e}^{-1} = -1/\mathrm{e} < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ ist Hochstelle
   y-Koordinate: $f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ HoP$(1|0)$

   (g) *Wendepunkte:*
   Kandidaten:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (x-2)\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$
   Test: $f'''(2) = (2-4)\mathrm{e}^{-2} = -2/\mathrm{e} < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ ist Wendestelle
   y-Koordinate: $f(2) = 1/\mathrm{e}^2 \quad \Rightarrow \quad$ WeP$(2|0.14)$

   (h) *Graph:*



3. $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

(b) *Symmetrie:*

$f(-x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x} \neq f(x)$ (für alle x)

$-f(-x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} \neq f(x)$ (für alle x)

$\Rightarrow$ weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

(c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ (x-Achse ist Asymptote)

(d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*

$(x^2 - 2x + 2) \cdot e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad$ keine Nullstellen (negative Diskriminante)

$f(0) = 2$

(e) *Ableitungen:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2 - 2x + 2)e^x \\
f'(x) &= (2x - 2) \cdot e^x + (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x = x^2 \cdot e^x \\
f''(x) &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x \\
f'''(x) &= (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x
\end{aligned}$$

(f) *Extremstellen:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
x^2 \cdot e^x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Test: $f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ unklar

(g) *Wendepunkte:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
(x^2 + 2x) \cdot e^x &= 0 \\
x(x + 2) \cdot e^x &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= -2
\end{aligned}$$

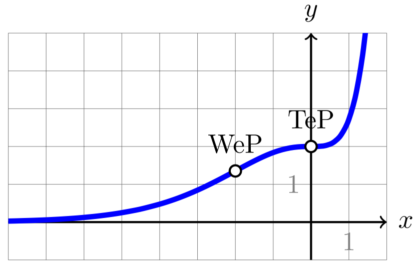
Test: $f'''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ist Wendestelle

$f'''(-2) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$ ist Wendestelle

y-Koordinaten: $f(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad$ TeP$(0|2)$

$f(-2) = 10e^{-2} \quad \Rightarrow \quad$ WeP$(-2|3.68)$

(h) *Graph:*



4. $f(x) = x \cdot \ln x$

   (a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} = (0, \infty)$

   (b) *Symmetrie:*
   $f(-x) = (-x)\ \ln(-x) \neq f(x)$ für alle x
   $-f(-x) = x\ \ln(-x) \neq f(x)$ für alle x
   $\Rightarrow$ weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

   (c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*
   $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

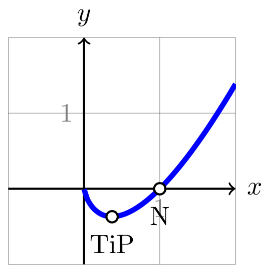
   (d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*
   $x \cdot \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$
   $f(0)$ ist nicht definiert

   (e) *Ableitungen:*
$$\begin{aligned} f(x) &= x\ \ln x \\ f'(x) &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \\ f''(x) &= \frac{1}{x} \\ f'''(x) &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

   (f) *Extremstellen:*
   Kandidaten:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1 \\ x &= \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$
   Test: $f''(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{e}^1$ ist Tiefstelle
   y-Koordinate: $f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}\ \ln \mathrm{e}^{-1} = -\mathrm{e}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(0.37| - 0.37)$

   (g) *Wendepunkte:*
   Kandidaten:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{1}{x} &= 0 \end{aligned}$$
   $\Rightarrow$ keine Wendepunkte

   (h) *Graph:*



5. $f(x) = 5\,\dfrac{\ln x}{x}$

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} = (0, \infty)$

(b) *Symmetrie:*
weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

(c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$; Asymptoten: x- und y-Achse

(d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*
$\dfrac{5\,\ln x}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$
$f(0)$ ist nicht definiert

(e) *Ableitungen:*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{5\,\ln x}{x} = 0 \\
f'(x) &= \frac{5/x \cdot x - 5\,\ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{5 - 5\ln x}{x^2} \\
f''(x) &= \frac{(-5/x)\cdot x^2 - (5 - 5\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-15x + 10x\ln x}{x^4} = \frac{10\ln x - 15}{x^3} \\
f'''(x) &= \frac{(10/x)\cdot x^3 - (10\ln x - 15)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{55 - 30\log x}{x^4}
\end{aligned}
$$

(f) *Extremstellen:*
Kandidaten:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
5 - 5\ln x &= 0 \\
x &= \mathrm{e}
\end{aligned}
$$

Test: $f''(\mathrm{e}) = -15 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{e}$ ist Hochstelle
y-Koordinate: $f(\mathrm{e}) = 5/\mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad$ HoP$(2.72|1.84)$

(g) *Wendepunkte:*
Kandidaten:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
10\ln x - 15 &= 0 \\
\ln x &= 1.5 \\
x &= \mathrm{e}^{1.5}
\end{aligned}
$$

Test: $f''(\mathrm{e}^{1.5}) = -15 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{e}^{1.5}$ ist Wendestelle
y-Koordinate: $f(\mathrm{e}^{1.5}) \approx 1.67 \quad \Rightarrow \quad$ WeP$(4.48|1.67)$

(h) *Graph:*