Nachtrag II: Diskussion von Exponential- und Logarithmusfunktionen

1. Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x-2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$.

   (a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

   (b) *Symmetrie:*

   $f(-x) = (-x-2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \neq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ nicht ordinatensymmetrisch

   $-f(x) = (-x+2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \neq f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ nicht ursprungssymmetrisch

   (c) Asymptotisches Verhalten:

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

   (d) Ordinatenabschnitt und Nullstellen:

   $$\begin{aligned} (x-2) \cdot \mathrm{e}^{x^2/2} &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   $f(0) = (0-2) \cdot \mathrm{e}^0 = -2$

   (e) Ableitungen:

   $$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + (x-2) \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = (x^2 - 2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

   $$f''(x) = (2x-2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + (x^2-2x+1) \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = (x^3 - 2x^2 + 3x - 2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

   $$\begin{aligned} f'''(x) &= (3x^2 - 4x + 3) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + (x^3 - 2x^2 + 3x - 2) \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\ &= (x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x + 3)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

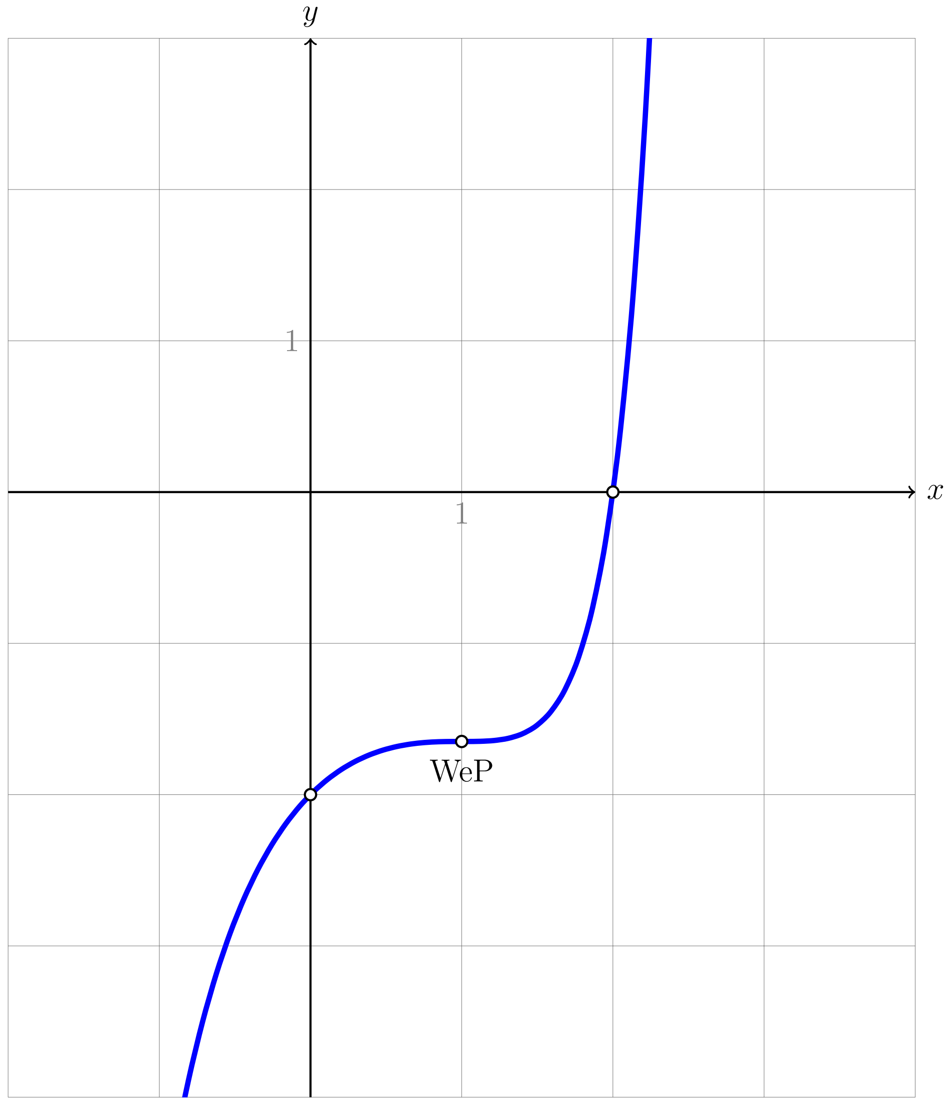
   (f) Extrempunkte:

   - Kandidaten:
     $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (x^2 - 2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} &= 0 \\ x_1 = x_2 &= 1 \end{aligned}$$
   - Test: $f''(1) = (x^3 - 2x^2 + 3x - 2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 1} = 0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ unklar

   (g) Wendepunkte:

   - Kandidaten:
     $$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (x^3 - 2x^2 + 3x - 2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$
   - Test: $$\begin{aligned} f'''(1) &= (x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x + 3) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 1} \\ &= (1 - 2 + 6 - 6 + 3) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned}$$
   - y-Koordinate: $f(1) = (1-2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -1.65 \Rightarrow \mathrm{WeP}(1|-1.65)$

(h) Graph:



2. Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \ln(2x - x^2)$

   (a) *Definitionsbereich:*

   $2x - x^2 > 0$

   $x(2 - x) > 0$

   $D = (0, 2)$ [Das ist ein offenes Intervall; kein Punkt.]

   (b) *Symmetrie:*

   Die innere Funktion $2x - x^2$ ist weder gerade noch ungerade also auch $f(x)$ nicht.

   (c) Asymptoten:

   $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

   (d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \ln(2x - x^2) &= 0 \\ 2x - x^2 &= 1 \\ 0 &= x^2 - 2x + 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   Der Ordinatenabschnitt $f(0)$ ist nicht definiert

   (e) Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{2x - x^2} \cdot (2 - 2x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(x^2 - 2x) - (2x - 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{2x^2 - 4x - (4x^2 - 8x + 4)}{(x^2 - 2x)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 4x - 4}{(x^2 - 2x)^2} = -\frac{2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -\frac{(4x - 4) \cdot (x^2 - 2x)^2 - (2x^2 - 4x + 4) \cdot 2(x^2 - 2x)^1(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^4} \\ &= -\frac{(4x - 4) \cdot (x^2 - 2x) - (2x^2 - 4x + 4) \cdot 2(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^3} \\ &= -\frac{4(x - 1) \cdot (x^2 - 2x) - (2x^2 - 4x + 4) \cdot 4(x - 1)}{(x^2 - 2x)^3} \\ &= -\frac{4(x - 1)\big[(x^2 - 2x) - (2x^2 - 4x + 4)\big]}{(x^2 - 2x)^3} \\ &= -\frac{4(x - 1)\big[-x^2 + 2x - 4\big]}{(x^2 - 2x)^3} = \frac{4(x - 1)\big(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 - 2x)^3} \end{aligned}$$

   (f) Extrempunkte:

   - Kandidaten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} &= 0 \\ 2x - 2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

- Test: $f''(1) = -\frac{2-4+4}{(1-2)^2} = -\frac{2}{1} = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ ist Hochstelle
- y-Koordinate:
  $y = f(1) = \ln(2 \cdot 1 - 1) = \ln(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1|0)$

(g) Wendepunkte:

- Kandidaten: $$f''(x) = 0$$ $$-2x^2 + 4x - 4 = 0$$
  keine Lösung $\Rightarrow$ keine Wendepunkte

(h) Graph: