3. (a) $f(x) = \dfrac{8}{4-x^2} = \dfrac{8}{(2-x)(2+x)}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
- *Symmetrie:* Zähler- und Nennerpolynom sind beide gerade Funktionen. Also ist $f(x)$ eine gerade Funktion und der Graph ordinatensymmetrisch, d. h. symmetrisch zur y-Achse.
- *Nullstellen:* $N = \{\,\}$ (keine)
- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{8}{4-0} = 2$
- *Verhalten bei den Defintionslücken:*

  $x = -2$: $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$; Pol mit Vzw

  $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$; Pol mit Vzw

  Beachte die Symmetrie der Vorzeichen: $-/+/+/-$ (von links nach rechts)

  (keine hebbaren Definitionslücken)
- *Verhalten für grosse $|x|$:*

  Da der Grad des Zählerpolynoms (0) kleiner als der Grad des Nennerpolynoms (2) ist, muss keine Polynomdivision durchgeführt werden, weil $f(x)$ gegen Null konvergiert, wenn $|x|$ gegen ∞ strebt.

  für grosse $|x|$ gilt: $f(x) \approx 0$ ($y = 0$ ist horizontale Asymptote)
- *Ableitungen:*

  $$f'(x) = \frac{0 \cdot (4-x^2) - 8 \cdot (-2x)}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{16x}{\left(4-x^2\right)^2}$$

  $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{16 \cdot \left(4-x^2\right)^2 - 16x \cdot 2 \cdot \left(4-x^2\right) \cdot (-2x)}{\left(4-x^2\right)^4} \\ &= \frac{16 \cdot \left(4-x^2\right)^2 + 64x^2 \cdot \left(4-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^4} \qquad [\text{mit } (4-x^2) \text{ kürzen}] \\ &= \frac{16 \cdot \left(4-x^2\right) + 64x^2}{\left(4-x^2\right)^3} \\ &= \frac{64 + 48x^2}{\left(4-x^2\right)^3} \end{aligned}$$

  Beachte: Der Nenner $\left(4-x^2\right)^2$ wird sinnvollerweise mit der Kettenregel abgeleitet: die Ableitung der äusseren Funktion $(4-x^2)^2$ wird bei unveränderter innerer Funktion [also $2 \cdot (4-x^2)$] mit der Ableitung der inneren Funktion [also $-2x$] multipliziert.

- *Extrempunkte:*

  Kandidaten: $f'(x) = \dfrac{16x}{(4-x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

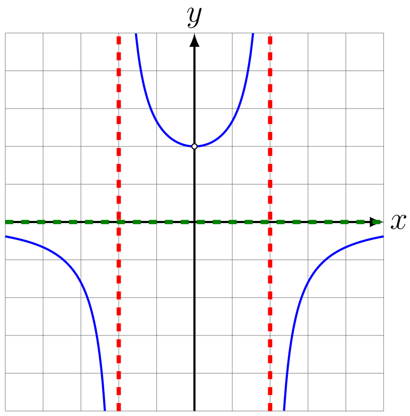
  Bemerkung: In Frage kommen nur Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, da die Division durch Null verboten ist.

  Test: $f''(0) = \dfrac{64+0}{(4-0)^3} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ TiP(0, 2) [$\rightarrow$ Ordinatenabschnitt]

- *Wendepunkte:*

  Kandidaten: $f''(x) = \dfrac{64+48x^2}{\left(4-x^2\right)^3} = 0$ (keine Nullstellen im Zähler)

- *Graph:* (Abstand Gitternetzlinien: 1 Einheit)



(b) $f(x) = \dfrac{4+x^2}{x^2-9} = \dfrac{(2-x)(2+x)}{(x-3)(x+3)}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$
- *Symmetrie:* Zähler- und Nennerpolynom sind beide gerade Funktionen. Also ist $f(x)$ eine gerade Funktion und der Graph ordinatensymmetrisch, d. h. symmetrisch zur y-Achse.
- *Nullstellen:* $N = \{\,\}$ (keine)
- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{4}{-9} \approx -0.44$
- *Verhalten bei den Defintionslücken:*

  $x=-3$: $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$; Pol mit Vzw

  $x=3$: $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$; Pol mit Vzw

  Beachte die Symmetrie der Vorzeichen: $+/-/-/+$ (von links nach rechts)

  (keine hebbaren Definitionslücken)
- *Verhalten für grosse $|x|$:*

  Da der Grad des Zählerpolynoms (2) gleich gross wie der Grad des Nennerpolynoms (2) ist, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden. Beachte, dass die Terme vor der Division nach absteigenden Potenzen von x sortiert werden müssen, da sonst die Polynomdivision nicht funktioniert.

  $$(x^2+4) : (x^2-9) = 1 + \frac{13}{x^2-9} \quad \text{(ohne ausführliche Berechnung)}$$

  für grosse $|x|$ gilt: $f(x) \approx 1$ ($y = 1$ ist horizontale Asymptote)
- *Ableitungen:*

  $$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-9) - (4+x^2)\cdot 2x}{\left(x^2-9\right)^2}$$
  $$= \frac{2x^3 - 18x - 8x - 2x^3}{\left(x^2-9\right)^2} = \frac{-26x}{\left(x^2-9\right)^2}$$

  $$f''(x) = \frac{-26\cdot\left(x^2-9\right)^2 + 26x\cdot 2\cdot\left(x^2-9\right)\cdot 2x}{\left(x^2-9\right)^4}$$
  $$= \frac{-26\cdot\left(x^2-9\right)^2 + 104x^2\cdot\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-9\right)^4} \quad [\text{mit } (x^2-9) \text{ kürzen}]$$
  $$= \frac{-26\cdot\left(x^2-9\right) + 104x^2}{\left(x^2-9\right)^3}$$
  $$= \frac{78x^2+234}{\left(x^2-9\right)^3}$$

Beachte: Der Nenner $\left(x^2-9\right)^2$ wird sinnvollerweise mit der Kettenregel abgeleitet: die Ableitung der äusseren Funktion $(x^2-9)^2$ wird bei unveränderter innerer Funktion [also $2\cdot(x^2-9)$] mit der Ableitung der inneren Funktion [also $2x$] multipliziert.

- *Extrempunkte:*

  Kandidaten: $f'(x) = \dfrac{-26x}{(x^2-9)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

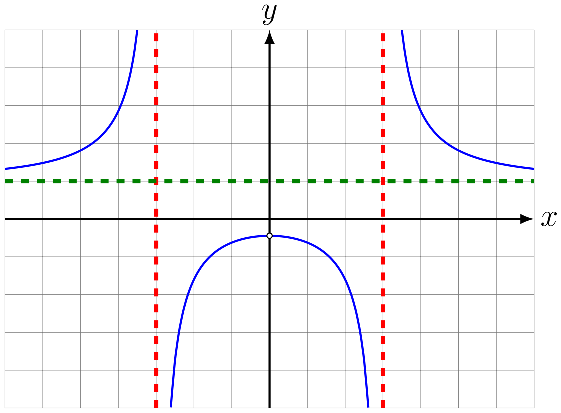
  Bemerkung: In Frage kommen nur Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, da die Division durch Null verboten ist.

  Test: $f''(0) = \dfrac{0+234}{(0-9)^3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}\left(0, -\frac{4}{9}\right)$ [$\rightarrow$ Ordinatenabschnitt]

- *Wendepunkte:*

  Kandidaten: $f''(x) = \dfrac{48x^2+234}{\left(x^2-9\right)^3} = 0$ (keine Nullstellen im Zähler)

- *Graph:* (Abstand Gitternetzlinien: 1 Einheit)



(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- *Symmetrie:* Da das Nennpolynom aus Termen mit ungeraden und geraden Exponenten der Variablen x besteht, liegt keine uns bekannte Symmetrie vor.
- *Nullstellen:* $N = \{0\}$

  Bemerkung: Wegen $x^2 = 0$ ist $x = 0$ eine „doppelte“ Nulltelle, was meist auf eine Extremstelle hinweist.
- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{0}{-1} = 0$
- *Verhalten bei den Defintionslücken:*

  $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; Pol mit Vzw

  (keine hebbaren Definitionslücken)
- *Verhalten für grosse $|x|$:*

  Da der Grad des Zählerpolynoms (2) grösser als der Grad des Nennerpolynoms (1) ist, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

  $(x^2 + 0x + 0) : (x-1) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ (ohne ausführliche Berechnung)

  für grosse $|x|$ gilt also: $f(x) \approx x + 1$ ($y = x + 1$ ist schiefe Asymptote)
- *Ableitungen:*

  $$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

  $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4} \qquad \text{[mit } (x-1) \text{ kürzen]} \\ &= \frac{(2x-2)\cdot(x-1) - (x^2-2x)\cdot 2}{(x-1)^3} \qquad \text{[ausmultiplizieren, vereinfachen]} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

  Beachte: Der Nenner $(x-1)^2$ wird sinnvollerweise mit der Kettenregel abgeleitet: die Ableitung der äusseren Funktion $(x-1)^2$ wird bei unveränderter innerer Funktion [also $2\cdot(x-1)$] mit der Ableitung der inneren Funktion [hier eine harmlose 1] multipliziert.
- *Extrempunkte:*

  Kandidaten: $f'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2$

Bemerkung: In Frage kommen nur Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, da die Division durch Null verboten ist.

Test:

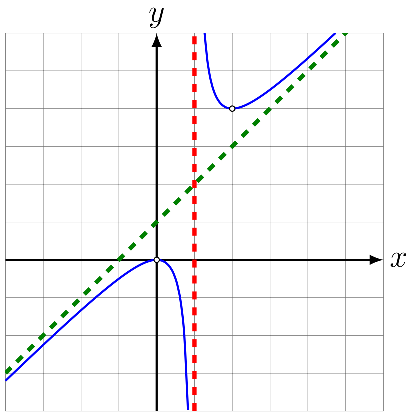
$f''(0) = \dfrac{2}{(0-1)^3} = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}\big(0,0\big)$ [→ Ordinatenabschnitt]

$f''(2) = \dfrac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}\big(2,4\big)$

- *Wendepunkte:*

  Kandidaten: $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} = 0$ (keine Nullstellen im Zähler)

- *Graph:* (Abstand Gitternetzlinien: 1 Einheit)



(h) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+6}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$
- *Symmetrie:* Das Zählerpolynom ist eine ungerade Funktion und das Nennerpolynom eine gerade. Deshalb ist die Funktion f ungerade und der Graph ist ursprungssymmetrisch.
- *Nullstellen:* $N = \{0\}$

  Bemerkung: Wegen $x^3 = 0$ ist $x = 0$ eine „dreifache" Nulltelle, was oft auf eine Wendestelle hinweist (siehe weiter unten).
- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{0}{0+6} = 0$
- *Verhalten bei den Defintionslücken:*

  (Mangels Definitionslücken gibt es hier nichts zu tun.)
- *Verhalten für grosse $|x|$:*

  Da der Grad des Zählerpolynoms (3) grösser als der Grad des Nennerpolynoms (2) ist, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

  $(x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0) : (x^2+6) = x - \dfrac{6x}{x^2+6}$ (ohne ausführliche Berechnung)

  für grosse $|x|$ gilt also: $f(x) \approx x$ ($y = x$ ist schiefe Asymptote)
- *Ableitungen:*

  $$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2+6) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2+6\right)^2} = \frac{3x^4 + 18x^2 - 2x^4}{\left(x^2+6\right)^2} = \frac{x^4+18x^2}{\left(x^2+6\right)^2}$$

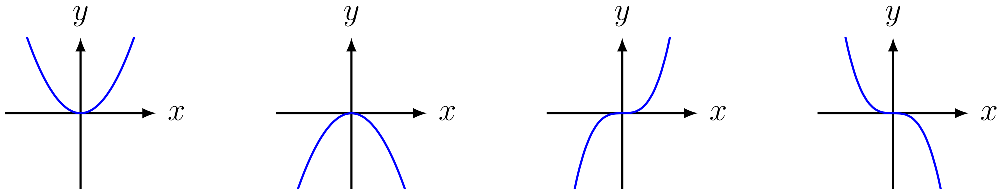
  $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3+36x)\cdot\left(x^2+6\right)^2 - (x^4+18x^2)\cdot 2\cdot\left(x^2+6\right)\cdot 2x}{\left(x^2+6\right)^4} \\ &= \frac{(4x^3+36x)\cdot\left(x^2+6\right) - (x^4+18x^2)\cdot 2\cdot 2x}{\left(x^2+6\right)^3} \\ &= \frac{4x^5+24x^3+36x^3+216x-4x^5-72x^3}{\left(x^2+6\right)^3} \\ &= \frac{216x-12x^3}{\left(x^2+6\right)^3} \end{aligned}$$

  Beachte: Der Nenner $\left(x^2+6\right)^2$ wird sinnvollerweise mit der Kettenregel abgeleitet: die Ableitung der äusseren Funktion $\left(x^2+6\right)^2$ wird bei unveränderter innerer Funktion [also $2\cdot\left(x^2+6\right)$] mit der Ableitung der inneren Funktion [hier $2x$] multipliziert.
- *Extrempunkte:*

  Kandidaten: $f'(x) = \dfrac{x^4+18x^2}{\left(x^2+6\right)^2} = \dfrac{x^2(x^2+18)}{\left(x^2+6\right)^2} \quad\Rightarrow\quad x_1 = 0$

Bemerkung: In Frage kommen nur Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, da die Division durch Null verboten ist.

Test: Wegen der Ursprungssymmetrie, kann es im Punkt $(0, 0)$ höchstens einen Wendepunkt und keinen Extrempunkt geben.



- *Wendepunkte:*

  Kandidaten: $f''(x) = \dfrac{216x - 12x^3}{\left(x^2+6\right)^3} = \dfrac{12x(18 - x^2)}{\left(x^2+6\right)^3}$

  $x_1 = -\sqrt{18} \approx -4.24$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{18} \approx 4.24$ (Symmetrie!)

  $\text{WeP}(-4.24, -3.18)$, $\text{TeP}(0, 0)$, $\text{WeP}(4.24, 3.18)$

- *Graph:* (Abstand Gitternetzlinien: 1 Einheit)