1. (a)
   - Polstelle: $x = 1$ (mit Vorzeichenwechsel)
   - $f(x) = \dfrac{-1}{x-1} = \dfrac{1}{1-x}$

   (b)
   - Polstelle: $x = 2$ (ohne Vorzeichenwechsel)
   - $f(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

   (c)
   - Polstelle: $x = 0.5$ (mit Vorzeichenwechsel)
   - $f(x) = \dfrac{1}{x-0.5}$

   (d)
   - Polstelle: $x = 0$ (ohne Vorzeichenwechsel)
   - $f(x) = \dfrac{1.5}{x^2}$

   (e)
   - Polstelle: $x = -1$ (mit Vorzeichenwechsel)
   - $f(x) = \dfrac{0.5}{x+1} = \dfrac{1}{2(x+1)}$

3. (a) $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$
   - Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
   - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$
   - Nullstellenmenge: $\{\,\}$

   (b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$
   - Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   - $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$
   - Nullstellenmenge: $N = \{\frac{1}{2}\}$

   (c) $f(t) = \dfrac{2t+2}{t^2-1} = \dfrac{2(t+1)}{(t-1)(t+1)} = \dfrac{2}{t-1}$ falls $t \neq -1$:
   - Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
   - $\lim\limits_{t \to -1^-} f(t) = -1,$ und $\lim\limits_{t \to -1^+} f(t) = -1$ [hebbare Definitionslücke]

     $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = -\infty,$ und $\lim\limits_{t \to 1^+} f(t) = +\infty$
   - Nullstellenmenge: $\{\,\}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x^2+2}$
   - Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$
   - Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken: —
   - Nullstellenmenge: $N = \left\{ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62 \right\}$

(e) $f(z) = \dfrac{z^2+2}{z^2-2}$

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
- $\lim\limits_{z \to -\sqrt{2}^-} f(z) = +\infty$ und $\lim\limits_{z \to -\sqrt{2}^+} f(z) = -\infty$

  $\lim\limits_{z \to \sqrt{2}^-} f(z) = -\infty$ und $\lim\limits_{z \to \sqrt{2}^+} f(z) = +\infty$
- Nullstellenmenge: $\{\,\}$

(f) $f(t) = \dfrac{2t-1}{t^2-2t-3} = \dfrac{2t-1}{(t-3)(t+1)}$

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$
- $\lim\limits_{t \to -1^-} f(t) = -\infty$ und $\lim\limits_{t \to -1^+} f(t) = +\infty$

  $\lim\limits_{t \to 3^-} f(t) = -\infty$ und $\lim\limits_{t \to 3^+} f(t) = +\infty$
- Nullstellenmenge: $N = \{\frac{1}{2}\}$

(g) $f(x) = \dfrac{0.5+4x}{x^3-1} = \dfrac{0.5+4x}{(x-1)(x^2+x+1)}$

Die Nennernullstelle $x = 1$ kann erraten werden, was zum Linearfaktor $(x-1)$ führt. Das Resultat der Polynomdivision $(x^3-1) : (x-1)$ ergibt den zweiten Faktor x^2+x+1. Da seine Diskrimininante $(b^2-4ac = 1^2-4\cdot 1\cdot 1 = -3)$ negativ ist, lässt er sich nicht mehr weiter in Linearfaktoren zerlegen.

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
- Nullstellenmenge: $N = \{-\frac{1}{8}\}$

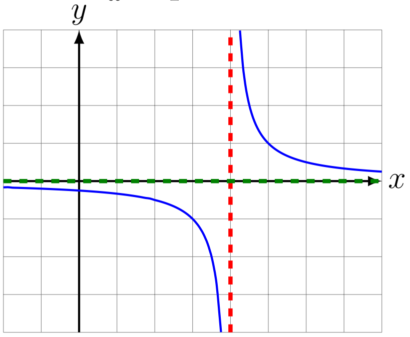
(h) $f(z) = \dfrac{(z-1)(z-2)}{(z+1)(z-2)}$

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$
- Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken:

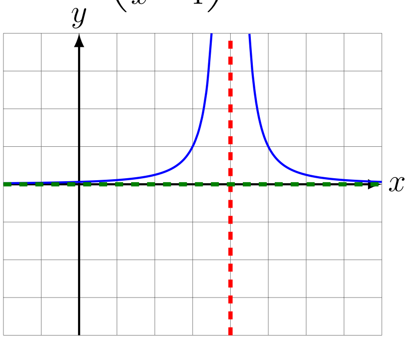
  $\lim\limits_{z \to -1^-} f(z) = +\infty$ und $\lim\limits_{z \to -1^+} f(z) = -\infty$

  $\lim\limits_{z \to 2^-} f(z) = \frac{1}{3}$ und $\lim\limits_{z \to 2^+} f(z) = \frac{1}{3}$ [hebbare Definitionslücke]
- Nullstellenmenge: $N = \{1\}$

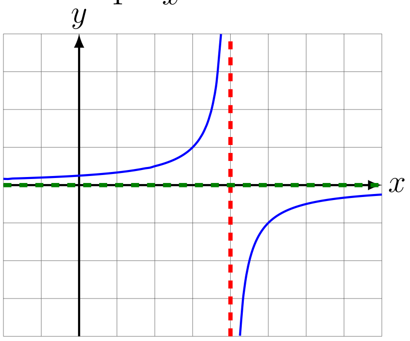
4. (a) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$



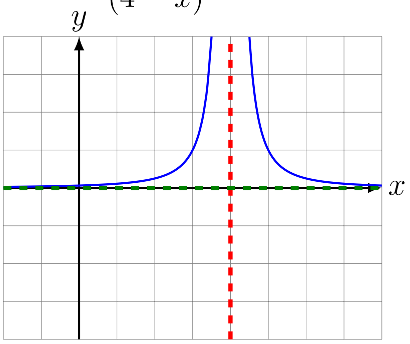
(b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x-4}\right)^2$



(c) $f(x) = \dfrac{1}{4-x}$



(d) $f(x) = \dfrac{1}{(4-x)^2}$

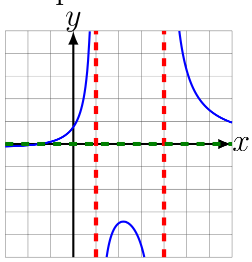


6. (a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+4} = \dfrac{2(x+1.5)}{(x-1)(x-4)}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$
- $N = \{-\frac{3}{2}\}$
- Da der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist, muss keine Polynomdivision durchgeführt werden, weil $f(x)$ gegen Null konvergiert, wenn $|x|$ gegen ∞ strebt.

  Also: $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ (horizontale) Asymptote $y = 0$
- Graph:

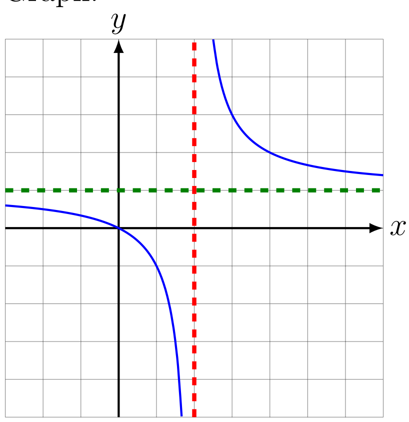


(b) $f(x) = \dfrac{2x^2-4x}{2x^2-8x+8} = \dfrac{2x(x-2)}{2(x-2)^2} = \dfrac{2x}{2(x-2)}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$
- $N = \{0\}$
- Da der Grad des Zählerpolynoms grösser oder gleich der Grad des Nennerpolynoms ist, muss eine Polynomdivision (mit dem gekürzten und ausmultiplizierten Bruchterm) durchgeführt werden:

$$2x : (2x-4) = 1 + \frac{4}{2x-4}$$

  Also: $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ (horizontale) Asymptote: $y = 1$
- Graph:



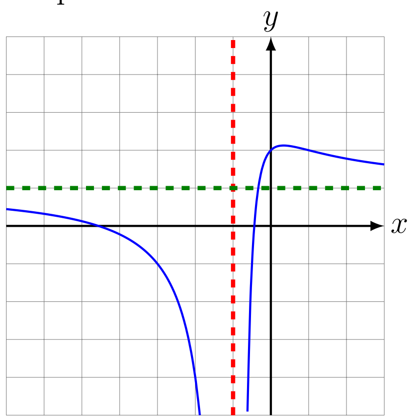
(c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 2}{(x+1)^2}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$
- $N = \{-4.56, -0.44\}$
- Da der Grad des Zählerpolynoms grösser oder gleich der Grad des Nennerpolynoms ist, muss eine Polynomdivision (mit dem gekürzten und ausmultiplizierten Bruchterm) durchgeführt werden:

$$(x^2 + 5x + 2) : (x^2 + 2x + 1) = 1 + \frac{3x+1}{x^2 + 2x + 1}$$

Also: $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ (horizontale) Asymptote: $y = 1$

- Graph:



(d) $f(x) = \dfrac{3x}{x^3 - 3x + 2} = \dfrac{3x}{(x+2)(x-1)^2}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$
- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
- $N = \{0\}$
- Da der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist, muss keine Polynomdivision durchgeführt werden, weil $f(x)$ gegen Null konvergiert, wenn $|x|$ gegen ∞ strebt.

  Also: $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ (horizontale) Asymptote $y = 0$
- Graph: