Gebrochenrationale Funktionen **Lösungen+** **Übungsblatt 1**

1. (a) echt gebrochenrational (Grad Zählerpolynom < Grad Nennerpolynom)
   (b) unecht gebrochenrational (Grad Zählerpolynom $\geq$ Grad Nennerpolynom)
   (c) ganzrational (Grad Nennerpolynom = 0)
   (d) echt gebrochenrational (Grad Zählerpolynom < Grad Nennerpolyom)

2. (a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   (b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$
   (c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   (d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x} = \dfrac{x}{x(x-4)} \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$
   (e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1\}$
   (f) $f(x) = \dfrac{x^5 + 2x - 4}{x^2 - 3x - 10} = \dfrac{x^5 + 2x - 4}{(x-5)(x+2)} \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$

3. (a)
```
 (x^3 + 2x^2 - 3x + 4) : (x-1) = x^2 + 3x + 4/(x-1)
-(x^2 -  x^2)
 ------------
        3x^2 - 3x
      -(3x^2 - 3x)
       -----------
                /  + 4 (Rest)
```
   (b)
```
 (2x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x^2 + x + 1) = 2x - 7 + (8x+6)/(x^2+x+1)
-(2x^3 + 2x^2 + 2x)
 ------------------
        -7x^2 +  x - 1
      -(-7x^2 - 7x - 7)
       ----------------
                8x + 6 (Rest)
```
   (c)
```
 (x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1) : (x+1) =  x^4-x^3+x^2-x+1-2/(x+1)
-(x^4 +  x^4)
 ------------
        -x^4 + 0x^3
      -(-x^4 -  x^3)
       -------------
                x^3 + 0x^2
              -(x^3 +  x^2)
               -------------
                       -x^2 + 0x
                     -(-x^2 -  x)
                      -----------
                               x - 1
                             -(x + 1)
                              -------
                                  -2 (Rest)
```

(d)
```
 (x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 6) : (x^2 + 3) = x^2 - 9x + 2 + (27x-12)/(x^2+3)
-(x^4        + 3x^2)
 -------------------
      -9x^3 + 2x^2
    -(-9x^3        - 27x)
     --------------------
             2x^2 + 27x - 6
           -(2x^2       + 6)
            ----------------
                    27x - 12 (Rest)
```
(e)
```
 (3x^2 - 4x + 5) : (2x + 1) = 1.5x - 2.75 + 7.75/(2x+1)
-(3x^2 + 1.5x)
 -------------
       -5.5x + 5
     -(-5.5x - 2.75)
      --------------
            + 7.75 (Rest)
```
(f) So wie die Aufgabe gestellt war, gab es nicht zu tun. Die Funktion hätte jedoch $f(x) = x^4/(x^2+1)$ lauten müssen und hätte dann folgende Lösung gehabt:
```
 (x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0) : (x^2 + 1) = x^2 - 1 + 1/(x^2+1)
-(x^4 +         x^2)
 -------------------
             -x^2 + 0x + 0
           -(-x^2      - 1)
            ---------------
                         1 (Rest)
```
(g)
```
 (4x^3 + x + 1) : (x - 2) = 4x^2 + 8x + 17
-(4x^3 - 8x^2)
 -------------
       8x^2 + x + 1
     -(8x^2 - 16x)
      ------------
             17x + 1
           -(17x - 34)
            ----------
                  35 (Rest)
```

4. (a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$
   - *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
   - *Nullstellen:* $N = \{3\}$
   - *hebbare Definitionslücken:* keine
   - *Polstelle:* $x = -5$ (mVzw)

   (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}$
   - *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
   - *Nullstellen:* $N = \{\,\}$
   - *hebbare Definitionslücke:* $x = -1$
   - *Polstelle:* $x = 1$ (mVzw)

   (c) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}$
   - *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

- *Nullstelle:* $N = \{1\}$
- *hebbare Definitionslücke:* $x = 2$
- *Polstelle:* $x = 3$ (mVzw)

(d) $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2+1}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$
- *Nullstellen:* $N = \{\frac{3}{5}\}$
- *hebbare Definitionslücken:* keine
- *Polstellen:* keine

(e) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+10x+25} = \dfrac{x+5}{(x+5)^2}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
- *Nullstellen:* $N = \{\,\}$
- *hebbare Definitionslücken:* keine
- *Polstelle:* $x = -5$ (mVzw)

(f) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1+x}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x+1}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- *Nullstellen:* $N = \{-\frac{1}{2}\}$
- *hebbare Definitionslücken:* keine
- *Polstelle:* $x = -1$ (mVzw)

(g) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-2)^2(x-3)^3}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2, 3\}$
- *Nullstellen:* $N = \{\,\}$
- *hebbare Definitionslücke:* $x = 1$
- *Polstellen:* $x = -1$ (mVzw), $x = 2$ (mVzw), $x = 3$ (oVzw)

(h) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6} = \dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$
- *Nullstellen:* $N = \{\,\}$
- *hebbare Definitionslücken:* $x = 2$
- *Polstellen:* $x = 3$ (mVzw)

(i) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x^4-5x^2+4} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x^2-1)(x^2-4)} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$
- *Nullstellen:* $N = \{\,\}$
- *hebbare Definitionslücken:* $x = 1$, $x = -2$
- *Polstellen:* $x = -1$ (mVzw), $x = 2$ (mVzw)