1. (a) unecht gebrochenrationale Funktion
   (b) echt gebrochenrationale Funktion
   (c) ganzrationale Funktion (da $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}$)

2. (a) $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ (3. binomische Formel)
   (b) $x^3 + 5x^2 = x^2(x+5)$ (x^2 ausklammern)
   (c) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = (x-3)(x-3)$ (2. binomische Formel)
   (d) $x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5)$ (Linearfaktorzerlegung erraten)
   (e) $x^2 + 1$ (nicht in reelle Linearfaktoren zerlegbar)
   (f) Das Vorgehen:
   - Löse die Gleichung $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0$ mit dem PolyRootFinder:

     $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$

     Achtung: Bei der Berechnung doppelter Nullstellen wie $x_3 = x_4 = 1$ entstehen oft Rundungsfehler. Durch Einsetzen von 1 (statt 1.000000834 oder 0.9999991662) in der Gleichung kann man sich vergewissern, dass die ganzzahlige Lösung $x_3 = x_4 = 1$ die richtige ist.
   - Aus jeder Lösung wird ein Linearfaktor gemacht, indem man dafür sorgt, dass dieser beim Einsetzen der Lösung Null ergibt:

     $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = (x+3)(x-2)(x-1)(x-1)$

3. (a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$
   (b) $D = \mathbb{R} \setminus \{4, -7\}$
   (c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ (im Nenner x ausklammern)
   (d) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$ (Nenner in Linearfaktoren zerlegen)
   (e) $D = \mathbb{R}$
   Die Gleichung $2x^2 - 3x + 5 = 0$ hat die Diskriminante $(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31 < 0$. Also gibt es keine relle Lösungen und somit auch keine Definitionslücken.

4. (a) $\frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}} = \text{ungerade} \quad \Rightarrow \quad \text{ursprungssymmetrisch}$
   (b) $\frac{\text{gerade}}{\text{gerade}} = \text{gerade} \quad \Rightarrow \quad \text{ordinatensymmetrisch}$
   (c) $\frac{\text{gemischt}}{\text{gerade}} = \text{gemischt} \quad \Rightarrow \quad \text{weder ursprungs- noch ordinatensymmetrisch}$
   (d) $\frac{\text{ungerade}}{\text{ungerade}} = \text{gerade} \quad \Rightarrow \quad \text{ordinatensymmetrisch}$

5. (a) $x = \frac{2}{8}$
   (b) $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} \Rightarrow x = 2$ ($1 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$)
   (c) keine Nullstellen

(d) $x = 5$ (PolyRootFinder)

6. (a) $f(0) = \dfrac{0-2}{0-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{0+0}{0-4} = 0$

   (c) $f(x) = \dfrac{(0+2)(0+3)}{0-5} = \dfrac{6}{-5} = -\dfrac{6}{5}$

   (c) $f(x) = \dfrac{0+1}{0} = \dfrac{1}{0}$ kein Ordinatenabschnitt (Division durch Null)

7. (a) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

   $x = 1$: Pol mit Vzw; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

   (b) $f(x) = \dfrac{-3}{(2-x)^2}$

   $x = 2$: Pol ohne Vzw; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

   (c) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{1}{x-3}$, wenn $x \neq -1$

   $x = 3$: Pol mit Vzw; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

   $x = -1$: hebbare Definitionslücke; $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{x-3} = -\dfrac{1}{4}$

   (d) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1$, wenn $x \neq 1$

   $x = 1$: hebbare Definitionslücke; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$

   (e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

   $x = 1$: Polstelle (mit Vzw) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

8. (a) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-6}{x-1}$ (Grad Zählerpolynom $\geq$ Grad Nennerpolynom)

   Polynomdivision: $(2x^2+3x-6) : (x-1) = 2x + 5 - \dfrac{1}{x-1}$

   Gleichung der Asymptote: $y = 2x + 5$ (schief)

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (Grad Zählerpolynom $<$ Grad Nennerpolynom)

   keine Polynomdivision nötig, da $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$

   Gleichung der Asymptote: $y = 0$ (horizontal)

(c) $f(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$ (Grad Zählerpolynom $\geq$ Grad Nennerpolynom)

Polynomdivision: $(x+3) : (2x+1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5/2}{2x+1}$

Gleichung der Asymptote: $y = \frac{1}{2}$ (horizontal)

9. (a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+9}$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2+9) - 3 \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{-6x}{(x^2+9)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-6 \cdot (x^2+9)^2 + 6x \cdot 2 \cdot (x^2+9) \cdot 2x}{(x^2+9)^4} \qquad \left[\text{kürze mit } (x^2+9)\right]$$

$$= \frac{-6 \cdot (x^2+9) + 6x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+9)^3} = \frac{-6x^2 - 54 + 24x^2}{(x^2+9)^3} = \frac{18x^2 - 54}{(x^2+9)^3}$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2+2) - (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^3 + 4x - 2x^3 + 8x}{(x+2)^2} = \frac{12x}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{12 \cdot (x^2+2)^2 - 12x \cdot 2 \cdot (x^2+2)^1 \cdot 2x}{(x^2+2)^4} \qquad \left[\text{kürze mit } (x^2+2)\right]$$

$$= \frac{12 \cdot (x^2+2) - 12x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+2)^3} = \frac{12x^2 + 24 - 48x^2}{(x^2+2)^3} = \frac{24 - 36x^2}{(x^2+2)^3}$$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{(2x-4) \cdot (x-2) - (x^2-4x+3) \cdot 1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4) \cdot (x-2)^2 - (x^2-4x+5) \cdot 2 \cdot (x-2)^1 \cdot 1}{(x-2)^4} \qquad [\text{kürze } (x-2)]$$

$$= \frac{(2x-4) \cdot (x-2) - (x^2-4x+5) \cdot 2}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x - 10}{(x-2)^3} = \frac{-2}{(x-2)^3}$$

10. • Kandidaten ermitteln:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 1$$

- Kandidaten testen:

$$f''(-1) = \frac{2\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^3} = \frac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \text{ ist Tiefstelle}$$

$$f''(1) = \frac{2\cdot 1^3 - 6\cdot 1}{\left(1^2+1\right)^3} = \frac{-1}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \text{ ist Hochstelle}$$

- Extrempunkte bestimmen:

$$y_1 = f(x_1) = f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1,-0.5)$$

$$y_2 = f(x_2) = f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(1,0.5)$$

11.
- Kandidaten ermitteln:

$$f''(x) = \frac{6x^2-6x}{(x^2-x+1)^3} = \frac{6x(x-1)}{(x^2-x+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1$$

- Kandidaten testen:

$$f'''(0) = \frac{-6}{1} = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ ist Wendestelle}$$

$$f''(1) = \frac{-24+36-6}{(1-1+1)^4} = \frac{6}{1} = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \text{ ist Wendestelle}$$

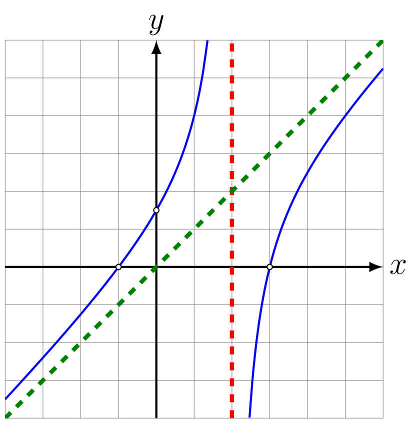
- Extrempunkte bestimmen:

$$y_1 = f(x_1) = f(0) = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(0,1)$$

$$y_2 = f(x_2) = f(1) = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(1,1)$$

12. (a) vertikale Asymtpote $x = 2$ einzeichnen
    (b) schiefe Asymtpote $y = x$ einzeichnen
    (c) Nullstellen und Ordinatenabschnitt einzeichnen
    (d) ohne Wendepunkte darf die Asymptote $y = x$ nicht geschnitten werden.

    Dies lässt nur den folgenden Kurvenverlauf zu:



13. (a) Wegen der senkrechten Asymptote bei $x = 1$ (ohne Vzw) könnte der gesuchte Term den Nenner $x - 1$ haben. Die Nullstelle $x = -1$ verursacht den Term $x + 1$ im Zähler. Dies ergibt diefolgende Kandidatin:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Setzt man probehalber die Punkte $(0, -1)$, $(2, 3)$ und $(3, 2)$ in diese Funktionsgleichung ein, erhält man die Bestätigung für ihre Korrektheit.

(b) Wegen der senkrechten Asymptote bei $x = 2$ (mit Vzw) könnte der gesuchte Term den Nenner $(x-2)^2$ haben. Nullstellen fehlen. An der Stelle $x = 1$ befindet sich eine hebbare Definitionslücke. Dies ergibt die vorläufige Kandidatin:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Setzt man probehalber die x-Koordinate des Punkts $(3, -1)$ in die provisorische Funktionsgleichung ein, erhält man

$$y = \frac{(3-1)}{(3-1)(3-2)^2} = \frac{2}{2} = 1$$

anstelle von -1. Also müssen wir nur noch das Vorzeichen des Funktionswerts wenden und erhalten schliesslich:

$$f(x) = \frac{-(x-1)}{(x-1)(x-2)^2} \quad \text{oder} \quad f(x) = \frac{1-x}{(x-1)(x-2)^2}$$