Beachte: Für die Aufgaben mit einem Stern ($*$) benötigt man den Taschenrechner. Die übrigen Aufgaben sollte ohne ihn gelöst werden.

1. Beschreibe mit dem richtigen Fachausdruck den Typ der Funktion.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 3x - 2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x}{x^3 + x^5}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x - 5}{8}$

2. Zerlege die Polynome in (reelle) Linearfaktoren.

   (a) $x^2 - 9$
   (b) $x^3 + 5x^2$
   (c) $x^2 - 6x + 9$
   (d) $x^2 - 2x - 15$
   (e) $x^2 + 1$
   (f) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ ($*$)

3. Bestimme den Definitionsbereich der gebrochenrationalen Funktionen.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{3x + 2}$
   (b) $f(x) = \dfrac{x - 4}{(x - 4)(x + 7)}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x}$
   (d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 5x + 4}$
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 5}$

4. Beschreibe die Symmetrie des Graphen von f.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2}{3x}$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 1}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 4}$
   (d) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x}{2x^5 - 2x^3}$

5. Bestimme die Nullstellen der gebrochenrationalen Funktionen.

   (a) $f(x) = \dfrac{2x - 7}{x^2 - 1}$
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3-5x^2+4x-20}{x+5}$ $(*)$

6. Bestimme den Ordinatenabschnitt der Funktion f.

(a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)(x+3)}{x-5}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

7. Bestimme alle Definitionslücken der Funktion f und untersuche, ob sie hebbar sind oder ob es sich um Polstellen handelt. Bei Polstellen sind die links und rechtsseitigen Grenzwerte zu bestimmen; bei hebbaren Definitionslücken ist der Grenzwert an der betreffenden Stelle zu berechnen.

(a) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{-3}{(2-x)^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-3)}$

(d) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-1}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

8. Untersuche das asymptotische Verhalten der Funktion f und gib die Gleichung der Asymptote für grosse $|x|$ an.

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-6}{x-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$

9. Bestimme die erste und die zweite Ableitung der Funktion f. (Taschenrechner egal)

(a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+9}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$

10. Bestimme die Extrempunkte der Funktion f aufgrund der gegebenen ersten und zweiten Ableitung. $(*)$

    Bemerkung: Die Aufgabenstellung wird in dieser Form eher nicht an der Prüfung vorkommen. Als Kontrolle, ob man den Lösungsweg versteht, ist sie jedoch sinnvoll.

    $$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \qquad f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

11. Bestimme die Wendepunkte der Funktion f aufgrund der gegebenen zweiten und dritten Ableitung. $(*)$

    Bemerkung: Die Aufgabenstellung wird in dieser Form eher nicht an der Prüfung vorkommen. Als Kontrolle, ob man den Lösungsweg versteht, ist sie jedoch sinnvoll.

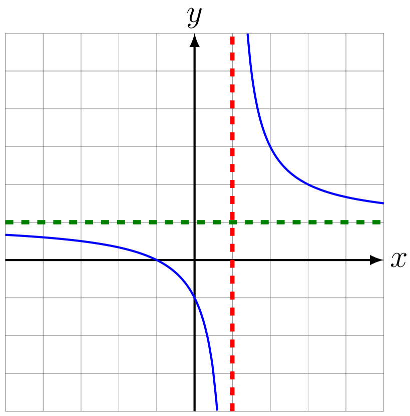
    $$f(x) = \frac{1}{x^2-x+1} \qquad f''(x) = \frac{6x^2-6x}{(x^2-x+1)^3} \qquad f'''(x) = \frac{-24x^3+36x^2-6}{(x^2-x+1)^4}$$

12. Skizziere den Graphen der Funktion aufgrund der gegebenen Informationen.

    - weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch
    - Nullstellenmenge: $N = \{-1, 3\}$
    - Ordinatenabschnitt: 1.5
    - Definitionsbereich: $D = \mathbb{D} \setminus \{2\}$
    - $f(x) \approx x$ für grosse $|x|$
    - weder Extrem- noch Wendepunkte

13. Bestimme die Gleichung der ganzrationalen Funktion aufgrund des Graphen. Die Gitternetzlinien haben einen Abstand von einer Einheit.

    (a) $f(x) = ?$

    (b) $f(x) = ?$