Nachtrag I: Funktionenscharen

Die Beispielfunktion

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Fragestellung (a)

Bestimme $f_t(x)$ für $t = -1,\ 0,\ 1,\ 2$

$f_{-1}(x) = x^2 - x - 1$

$f_0(x) = x^2$

$f_1(x) = x^2 + x + 1$

$f_2(x) = x^2 + 2x + 2$

Graphen mit dem TI-84+ zeichnen:

{-1, 0, 1, 2} $\rightarrow$ L_1

$\boxed{\text{Y=}}$

$Y_1 = X^2 + L_1X + L_1$

$\boxed{\text{WINDOW}}$

Xmin=-3

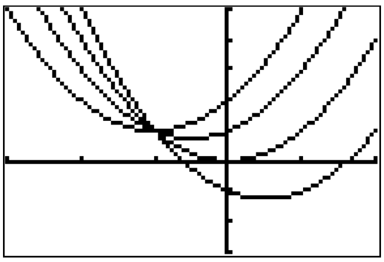
Xmax=2

Xscl=1

Ymin=-3

Ymax=5

Graphen von $f_t(x) = x^2 + tx + t$ für $t = -1,\ 0,\ 1,\ 2$:



Fragestellung (b)

Bestimme $f_t'(x)$ für $t = -1,\ 0,\ 1,\ 2$

$f_t'(x) = 2x + t$

$f_{-1}'(x) = 2x - 1$

$f_0'(x) = 2x$

$f_1'(x) = 2x + 1$

$f_2'(x) = 2x + 2$

Fragestellung (c)

Für welches t gilt $f_t(2) = 1$?

$$
\begin{aligned}
f_t(2) &= 1 \\
2^2 + t \cdot 2 + t &= 1 \\
4 + t \cdot 2 + t &= 1 \\
4 + 3t &= 1 \\
3t &= -3 \\
t &= -1
\end{aligned}
$$

Fragestellung (d)

Für welches t gilt $f_t'(2) = 1$?

$$
\begin{aligned}
f_t'(2) &= 1 \\
2 \cdot 2 + t &= 1 \\
4 + t &= 1 \\
t &= -3
\end{aligned}
$$

Fragestellung (e)

Bestimme formal die Nullstellen von $f_t(x)$

$$\begin{aligned} f_t(x) &= 0 \\ x^2 + tx + t &= 0 \\ D = b^2 - 4ac &= t^2 - 4t \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 4t}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 4t}}{2}$$

Fragestellung (f)

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t?

$$f_t'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = -\frac{t}{2}$$

Test: $f_t''(x) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Tiefpunkte

x_e in $f_t(x)$ einsetzen:

$$y = f_t\left(-\frac{t}{2}\right) = \left(-\frac{t}{2}\right)^2 + t\left(-\frac{t}{2}\right) + t = \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2} + t = -\frac{t^2}{4} + t$$

$$\Rightarrow T\left(-\frac{t}{2}\middle| -\frac{t^2}{4} + t\right)$$

Wir sind noch nicht ganz fertig.

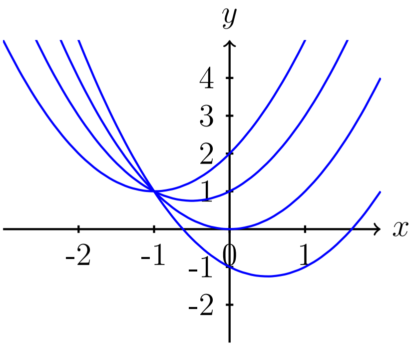
t aus den Koordinaten von

$$T\left(\underbrace{-\frac{t}{2}}_{x}\middle|\underbrace{-\frac{t^2}{4} + t}_{y}\right)$$

eliminieren:

$$-\frac{t}{2} = x \quad \Rightarrow \quad t = -2x \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4x^2}{4} - 2x = -x^2 - 2x$$

Kurve, auf der alle Extrempunkte liegen: $k\colon y = -x^2 - 2x$



Fragestellung (g)

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Suche x, so dass $f_t(x) = f_s(x)$ für $s \neq t$

$$\begin{aligned}
f_t(x) &= f_s(x) \\
x^2 + tx + t &= x^2 + sx + s \quad && || - x^2 \\
tx + t &= sx + s && || - sx \; - s \\
tx - sx + t - s &= 0 && x \text{ ausklammern} \\
(t-s)x + (t-s) &= 0 && || : (t-s) \\
x + 1 &= 0 \\
x &= -1
\end{aligned}$$

Einsetzen: $y = f_t(-1) = (-1)^2 + t \cdot (-1) + t = 1 - t + t = 1$

Gemeinsamer Punkt: $P(-1|1)$