Das Horner-Schema

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 6 = 250 - 75 - 55 + 6 = 126$

Anzahl Multiplikationen: $3 + (3 - 1) = 5$

(Wenn beim Potenzieren Zwischenresultate gespeichert werden.)

Anzahl Additionen/Subtraktionen: 3

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= x(2x^2 - 3x - 11) + 6 \\ &= x(x(2x - 3) - 11) + 6 \end{aligned}$$

Anzahl Multiplikationen: 3

Anzahl Additionen/Subtraktionen: 3

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	**126**
4	2	5	9	**42**
3	2	3	-2	**0**

$x = 3$ ist Nullstelle des Polynoms.

Polynomdivision mit $(x - 3)$ ergibt:

```
 (2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) : (x - 3) = 2x^2 + 3x - 2
-(2x^3 - 6x^2)
 -------------
        3x^2 - 11x
      -(3x^2 -  9x)
       ------------
               -2x + 6
             -(-2x + 6)
              ---------
                     0
```

Offenbar sind die Koeffizienten des Quotientenpolynoms 2, 3, -2 mit der Zeile im Horner-Schema für $x = 3$ identisch. Damit haben wir zwei Aufgaben gleichzeitig gelöst:

Findet man mit Hilfe des Horner-Schemas eine Nullstelle x_0 des Polynoms $f(x)$, so stehen in der betreffenden Zeile die Koeffizienten des Quotientenpolynoms $f(x) : (x - x_0)$.

Hinweis

Falls sich ein Polynom z. B. 3. Grades vollständig in Linearfaktoren zerlegen lässt, so hat es die Form

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= ax^3 + \ldots \underbrace{- a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}_{d} \end{aligned}$$

Wenn dieses Polynom ganzzahlige Nullstellen und ganzzahlige Koeffizienten hat, so muss jede Nullstelle (bis auf ein Vorzeichen) Teiler von d/a sein.

Beispiel 2

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

x				
		-9	24	-20
1	1	-8	16	-4
-1	1	-10	34	-54
2	1	-7	10	0
2	1	-5	0	
5	1	0		

Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$

Nullstelle müssen mehrfach getestet werden!