Das Horner-Schema

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

Anzahl Multiplikationen:

Anzahl Additionen/Subtraktionen:

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

Anzahl Multiplikationen:

Anzahl Additionen/Subtraktionen:

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6

Polynomdivision durch $(x - 3)$ ergibt:

```
 (2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) : (x - 3) = 2x^2 + 3x - 2
-(2x^3 - 6x^2)
 -------------
         3x^2 - 11x
       -(3x^2 -  9x)
        ------------
               -2x + 6
             -(-2x + 6)
              ---------
                      0
```

Offenbar sind die Koeffizienten des Quotientenpolynoms 2, 3, -2 mit der Zeile im Horner-Schema für $x = 3$ identisch. Damit haben wir zwei Aufgaben gleichzeitig gelöst:

Findet man mit Hilfe des Horner-Schemas eine Nullstelle x_0 des Polynoms $f(x)$, so stehen in der betreffenden Zeile die Koeffizienten des Quotientenpolynoms $f(x) : (x - x_0)$.

Hinweis

Falls sich ein Polynom z. B. 3. Grades vollständig in Linearfaktoren zerlegen lässt, so hat es die Form

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= ax^3 + \ldots \underbrace{- a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}_{d} \end{aligned}$$

Wenn dieses Polynom ganzzahlige Nullstellen und ganzzahlige Koeffizienten hat, so muss jede Nullstelle (bis auf ein Vorzeichen) Teiler von d/a sein.

Beispiel 2

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

x		-9	24	-20