

Aufgabe 1

Bestimme einige Glieder der Folgen und untersuche, ob sie beschränkt (*b*), monoton wachsend (*mw*), monoton fallend (*mf*) oder alternierend (*a*) sind.

$$(a) a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$(b) a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$(c) a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}$$

$$(d) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$$

$$(e) a_n = \sqrt[n]{2}$$

$$(f) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$(g) a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$(h) a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

Aufgabe 2

Gib eine explizite oder rekursive Definition für die nachstehenden Folgen an. Welche dieser Folgen sind beschränkt (*b*), welche monoton wachsend (*mw*) und welche monoton fallend (*mf*)?

$$(a) 1, 2, 6, 24, \dots$$

$$(b) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

$$(c) 0, 3, 8, 15, 24, \dots$$

$$(d) \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \dots$$

Aufgabe 3

Bestimme einige Glieder der rekursiv definierten Folgen. Welche der Folgen sind beschränkt (*b*), welche monoton wachsend, (*mw*), welche monoton fallend (*mf*)?

(a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 1$

(b) $b_1 = 1, b_2 = 2, b_{n+1} = 2 \cdot b_n - b_{n-1}$

(c) $c_1 = 1, c_2 = 2, c_{n+1} = \frac{c_n}{c_{n-1}}$

Aufgabe 4

Untersuche, ob die nachstehenden Folgen konvergieren oder divergieren. Falls sie konvergieren, ist der Grenzwert anzugeben.

Beachte: In der Differentialrechnung sind Winkel immer im Bogenmass angegeben.

(a) $a_n = (-1)^n$

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(c) $a_n = \sin \frac{\pi}{n}$

(d) $a_n = \sin \frac{n \cdot \pi}{4}$

(e) $a_n = n^{(-1)^n}$

(f) $a_n = \frac{n^3}{3^n}$

(g) $a_n = \sqrt[n]{c}, c > 0$

(h) $a_n = \sqrt[n]{n}$

Aufgabe 5

Bestimme den Grenzwert der Folgen (a_n) .

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = \frac{1}{n^2} - 2$

(c) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

(d) $a_n = \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 2}$

(e) $a_n = \sqrt{\frac{n}{4n+1}}$

(f) $a_n = e^{\frac{1}{n}}$

Aufgabe 6

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind. Gib in diesem Fall den Grenzwert an.

(a) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$

(b) $a_n = \frac{1 - 1/n^2}{1 + 1/n^2}$

(c) $a_n = \frac{1 + n^3}{n^3 - 1}$

(d) $a_n = \frac{n^3 + 1}{n^4 + 1}$

(e) $a_n = \frac{2n^3 - 2}{n - 2}$

(f) $a_n = \frac{2n^3 - 3n + 1}{4n + n^3 + 2}$

Aufgabe 7

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind. Gib in diesem Fall den Grenzwert an.

(a) $a_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{2\sqrt{n} + 3}$

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(c) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n + 1$

(d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n^2 + 1}$

Aufgabe 8

Widerlege die folgenden Behauptungen durch ein Gegenbeispiel:

(a) Jede monotone Folge ist konvergent.

(b) Jede beschränkte Folge ist divergent.

(c) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.

(d) Ist a_n divergent, so ist $\frac{1}{a_n}$ konvergent.