Differenzialrechnung

Lösungen+

Version vom 14. Dezember 2019

Aufgabe 1.1

$$\lim_{x\to 2}(3x-7) = -1$$

Aufgabe 1.2

$$\lim_{x\to \pi}\sin 3x = 0$$

Aufgabe 1.3

$$\lim_{x\to 0}(3x^2-4x+1) = 1$$

Aufgabe 1.4

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$$

Aufgabe 1.5

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-6x}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{2x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} 2x = 6$$

Aufgabe 1.6

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^3}{(x+2)} = \lim_{x\to -2}(x+2)^2 = 0$$

Aufgabe 1.7

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8$$

Aufgabe 1.8

$$\lim_{x\to -\frac{2}{3}}\frac{9x^2-4}{3x+2} = \lim_{x\to -\frac{2}{3}}\frac{(3x-2)(3x+2)}{3x+2} = \lim_{x\to -\frac{2}{3}}(3x-2) = -4$$

Aufgabe 1.9

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{(x^2+a^2)(x-a)(x+a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}(x^2+a^2)(x+a) = 4a^3\end{aligned}$$

Aufgabe 1.10

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

Aufgabe 1.11

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} &= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x-2}\\ &= \frac{0}{-4}\\ &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 1.12

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^3-7x+6} = \dots$$

Setzt man $x = 2$ in Zähler und Nenner ein, erhält man $0/0$. Also ist $(x-2)$ ein Linearfaktor von Zähler und Nenner.

Polynomdivision $(x^3-5x^2+2x+8):(x-2)$ mit Horner-Schema:

		-5	2	8
2	1	-3	-4	0

$\Rightarrow (x^3-5x^2+2x+8):(x-2) = x^2-3x-4$

Polynomdivision $(x^3-7x+6):(x-2)$ mit Horner-Schema

		0	-7	6
2	1	2	-3	0

$\Rightarrow (x^3-7x+6):(x-2) = x^2+2x-3$

$$\dots = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-3x-4)}{(x-2)(x^2+2x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x-4}{x^2+2x-3} = -\frac{6}{5}$$

Aufgabe 1.13

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x}) = 2$$

Aufgabe 1.14

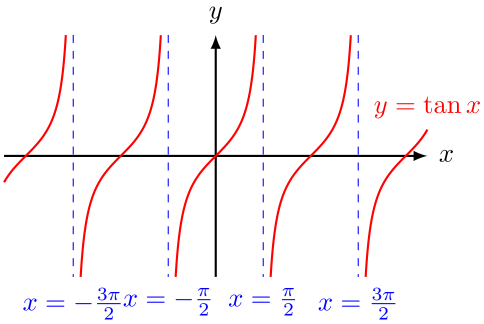
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Aufgabe 1.15

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Aufgabe 1.16

$\lim_{x\to\pi^+} \tan\frac{x}{2} = -\infty$



Aufgabe 1.17

$\lim_{x\to\pi^-} \tan\frac{x}{2} = \infty$ (siehe Graph)

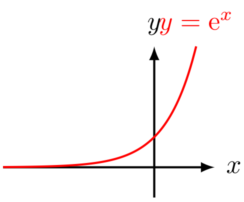
Aufgabe 1.18

$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \ldots$

Aus $x \to 0^+$ folgt $-\frac{1}{x} \to -\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$\cdots = \lim_{a\to-\infty} \mathrm{e}^a = 0$



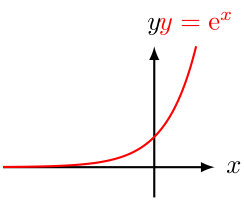
Aufgabe 1.19

$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \ldots$

Aus $x \to 0^-$ folgt $-\frac{1}{x} \to +\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$\cdots = \lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^a = \infty$



Aufgabe 1.20

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Aufgabe 1.21

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

Der Betrag darf weggelassen werden, da die Folge sich von der positiven Seite der Null nähert.

Aufgabe 1.22

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1$$

Der Betrag darf weggelassen werden, wenn man dafür einen Vorzeichenwechsel durchführt, denn die Folge besteht nur aus negativen Werten.

Aufgabe 1.23

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-0}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin\left(\left[x-\frac{\pi}{2}\right]/2\right)\sin\left(\left[x+\frac{\pi}{2}\right]/2\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

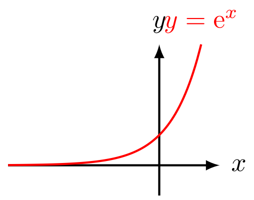
Substitution: $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=a \qquad (\Leftrightarrow \ x=2a+\frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{a\to 0}a=0$$

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0}\frac{-\sin(a)\sin\left(\frac{a+\pi/2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{a}&=\lim_{a\to 0}\left[\frac{-\sin(a)}{a}\cdot\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&=-1\cdot\sin\frac{\pi}{2}=-1\cdot 1=-1\end{aligned}$$

Aufgabe 1.24

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{-1/x^2}=\mathrm{e}^{-\infty}=0$$



Aufgabe 1.25

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Aufgabe 1.26

$$\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$$

Aufgabe 1.27

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$$

Aufgabe 1.28

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3/x+1}{1} = \frac{0+1}{1} = 1$$

Aufgabe 1.29

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1+2/x^2+1/x^2} = \frac{0}{1+0+0} = 0$$

Aufgabe 1.30

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{5x-9} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+3/x}{5-9/x} = \frac{4}{5}$$

Aufgabe 1.31

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+2}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+4/x+2/x^2}{2+1/x^2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 1.32

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2/x^2}{1} = \infty$$

Aufgabe 1.33

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/\sqrt{x}+1/x}{1+1/x} = 0$$

Aufgabe 1.34

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x+x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2+1/x+1}{1} = 1$$

Aufgabe 1.35

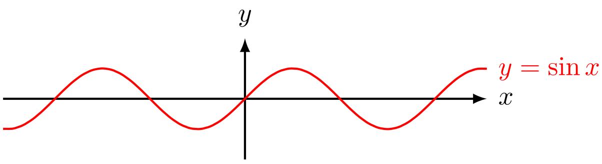
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x-x^2}{2x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x^2+1/x-1}{2+3/x^2} = \frac{0+0-1}{2+0} = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 1.36

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}/x}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{1+0}}{2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 1.37

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$ *existiert nicht*

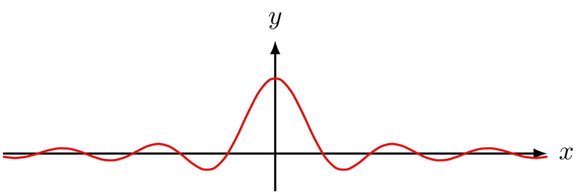


Die Werte der Sinusfunktion oszillieren auch „im Unendlichen“ ständig und haben daher keinen Grenzwert.

Aufgabe 1.38

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Da die Werte im Zähler zwischen -1 und $+1$ beschränkt sind, der Nenner aber immer grösser wird, strebt der Wert des Quotienten gegen Null.



Die Werte der Sinusfunktion oszillieren auch „im Unendlichen“ ständig und haben daher keinen Grenzwert.

Aufgabe 1.39

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to-\infty} -1 = -1$$

Das Auflösen des Betrags ist möglich, da die Werte der Folge $x \to -\infty$ ab einem bestimmten Folgeglied x_N immer negativ sein müssen.

Aufgabe 1.40

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^8}{2^x} = 0$

Hier muss man wissen, dass eine Exponentialfunktion (hier 2^x) mit zunehmendem x schneller wächst als jede Potenzfunktion (hier x^8).

Aufgabe 1.41

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^5} = \infty$

Hier muss man wissen, dass eine Exponentialfunktion (hier 2^x) mit zunehmendem x schneller wächst als jede Potenzfunktion (hier x^5).

Aufgabe 1.42

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

Dieser Grenzwert sollte bekannt sein.

(PAM-Formelsammlung S. 52).

Aufgabe 1.43

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{100} = 1$

Aufgabe 2.1

(a) $$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} f(3+h) &= \frac{(3+h)+2}{(3+h)-3} = \frac{h+5}{h} \\ &= 1 + 5/h \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} f(6+h) &= (6+h-4)^3 = (h+2)^3 \\ &= h^3 + 3\cdot 2^1 \cdot h^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot h^1 + 2^3 \\ &= h^3 + 6h^2 + 12h + 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2

$f(x) = x^2$; $x_0 = -3$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(-3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-6+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-6+h) = -6 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3

$f(x) = 3x - 4$; $x_0 = 2$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(2+h) - 4 - 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4

$f(x) = x^3$; $x_0 = 2$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{8 + 3\cdot 2^2 \cdot h + 3 \cdot 2 \cdot h^2 + h^3 - 8}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(12 + 6h + h^2) = 12 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.5

$f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = 4$

$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4}{4(4+h)} - \frac{(4+h)}{4(4+h)}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h} \cdot \frac{4-(4+h)}{4(4+h)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{4(4+h)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{4(4+h)} = -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.6

$$f(x) = \frac{1}{x+1};\ x_0 = 1$$

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(1+h)+1} - \frac{1}{1+1}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{2(2+h)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.7

$$f(x) = \frac{1}{x^2};\ x_0 = 2$$

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4-(2+h)^2}{4(2+h)^2}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4-(4+4h+h^2)}{4(2+h)^2}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-4h-h^2}{4(2+h)^2}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-4-h}{4(2+h)^2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.8

$$f(x) = \sqrt{x};\ x_0 = 4$$

$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{4+h} - \sqrt{4}\right)\left(\sqrt{4+h} + \sqrt{4}\right)}{h\left(\sqrt{4+h} + \sqrt{4}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(4+h) - 4}{h\left(\sqrt{4+h} + \sqrt{4}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{4+h} + \sqrt{4}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + \sqrt{4}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.9

$f(x) = \sqrt{2x};\ x_0 = 3$

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(3+h)} - \sqrt{2\cdot 3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\big(\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}\big)\big(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}\big)}{h\big(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}\big)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2h+6) - 6}{h\big(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}\big)} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h\big(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}\big)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.10

$f(x) = \sqrt{x+3};\ x_0 = -2$

$$
\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{-2+h+3} - \sqrt{-2+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\big(\sqrt{h+1} - 1\big)\big(\sqrt{h+1} + 1\big)}{h\big(\sqrt{h+1} + 1\big)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(h+1) - 1}{h\big(\sqrt{h+1} + 1\big)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\big(\sqrt{h+1} + 1\big)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.11

$f(x) = x^2 + 1;\ x_0 = -2$

$$
\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2 + 1 - (4+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h-4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (h-4) = -4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= m_t x + q \\
d5 &= -4 \cdot (-2) + q \\
q &= -3 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = -4x - 3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.12

$f(x) = \sqrt{x-3}$; $x = 4$

$$
\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h-3}-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1}+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$y = m_n\, x + q$

$1 = -2 \cdot 4 + q$

$q = 9 \quad \Rightarrow \quad n\colon y = -2x + 9$

Aufgabe 2.13

$f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$; $x = 1$

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2(1+h)-1} - 1\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{1+2h} - 1\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1-(1+2h)}{1+2h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-2h}{1+2h}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{1+2h} = -2
\end{aligned}
$$

$y = m_t\, x + q$

$1 = -2 \cdot 1 + q$

$q = 3 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = -2x + 3$

Aufgabe 2.14

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$; $x_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - (1+h) + \frac{1}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h^2 - 1 - h + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{2}h = 0
\end{aligned}
$$

Da die Tangente parallel zur x-Achse ist (Steigung: 0), muss die Normale senkrecht zur x-Achse verlaufen. Da $P(1, 0.5) \in G_f$, gilt: $n\colon x = 1$.

Aufgabe 2.15

$$f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x};\ x_0 = 2$$

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(2+h) - f(2)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[1 - \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+h}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2+h-2}{2(2+h)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2(2+h)} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$y = m_t\, x + q$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2 + q$$

$$q = 0 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = \frac{1}{4}x$$

Aufgabe 2.16

$f(x) = \sin(x);\ x = \frac{\pi}{4}$

[trigonometrische Funktionen + Grenzwerte: Bogenmass]

$$\begin{aligned}
f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - \sin\frac{\pi}{4}}{h} \\
&\overset{\text{S. 99}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos h + \cos\frac{\pi}{4}\sin h - \sin\frac{\pi}{4}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{\pi}{4}(\cos h - 1) + \cos\frac{\pi}{4}\sin h}{h} \\
&= \sin\frac{\pi}{4} \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos\frac{\pi}{4} \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&\overset{*}{=} \sin\frac{\pi}{4} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*\colon\ \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{\cos h - \cos 0}{h} \overset{\text{S. 99}}{=} -\frac{2}{h}\sin\frac{h+0}{2}\sin\frac{h-0}{2} \\
&= -\frac{2}{h}\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2 \qquad \text{substituiere } h' = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2h' \\
&= -\frac{2}{2h'} \cdot \left(\sin h'\right)^2 \\
&= -\sin h' \cdot \frac{\sin h'}{h'} \to 0 \cdot 1 \quad \text{für } h' \to 0 \Leftrightarrow h \to 0
\end{aligned}$$

$$y = m_t\, x + q$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + q$$

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{8}$$

$$t\colon\, y = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{8}$$

Aufgabe 2.17

$f(x) = \mathrm{e}^x$; $x = 1$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{1+h} - \mathrm{e}^1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^1 \mathrm{e}^h - \mathrm{e}^1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^1(\mathrm{e}^h - 1)}{h} \\ &= \mathrm{e} \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \ldots \end{aligned}$$

$\mathrm{e}^x \overset{\text{Def.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ist hier unpraktisch.

$$\begin{aligned} \text{Alternative: } \mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots \quad \text{(Nachweis: später)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ldots &= \mathrm{e} \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \\ &= \mathrm{e} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\left(1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \ldots\right) - 1\right] \\ &= \mathrm{e} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \ldots\right] \\ &= \mathrm{e} \lim_{h\to 0} \left[1 + \frac{1}{2!}h + \frac{1}{3!}h^2 + \ldots\right] \\ &= \mathrm{e} \cdot 1 = \mathrm{e} \end{aligned}$$

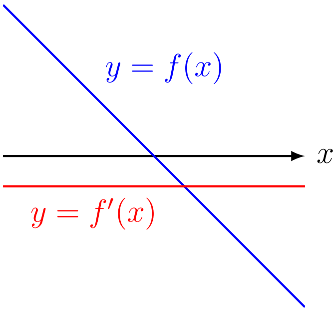
$$y = mx + q$$

$$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \cdot 1 + q$$

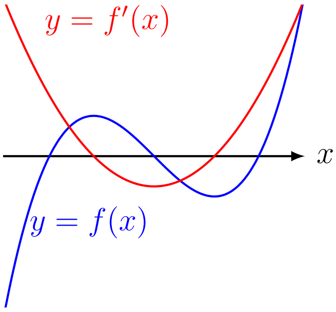
$$q = 0$$

$$t\colon\, y = \mathrm{e} \cdot x$$

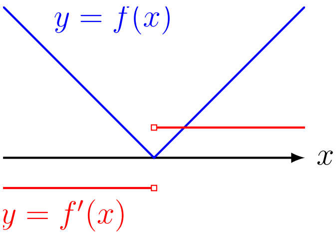
Aufgabe 2.18



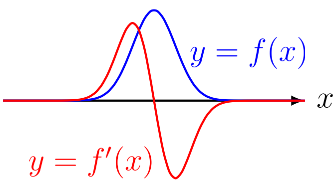
Aufgabe 2.19



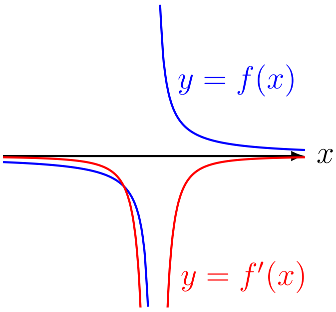
Aufgabe 2.20



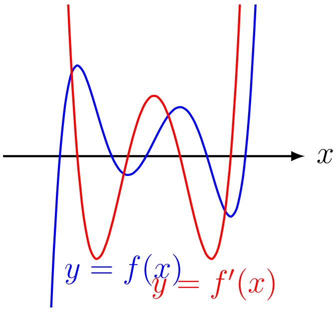
Aufgabe 2.21



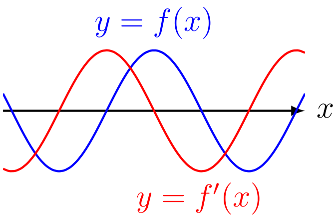
Aufgabe 2.22



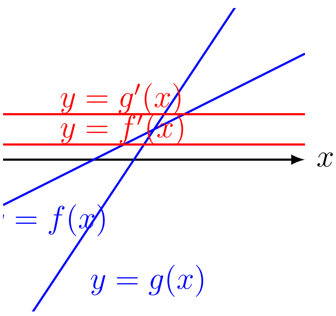
Aufgabe 2.23



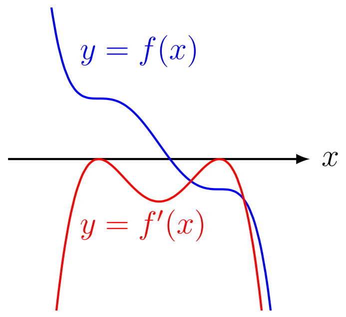
Aufgabe 2.23



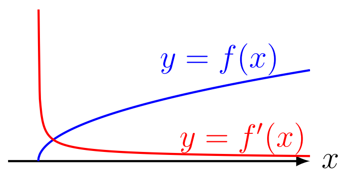
Aufgabe 2.24



Aufgabe 2.25



Aufgabe 2.26



Aufgabe 3.1

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin^2 h}-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\bigl(\sqrt{1-\sin^2 h}-1\bigr)\bigl(\sqrt{1-\sin^2 h}+1\bigr)}{h\bigl(\sqrt{1-\sin^2 h}+1\bigr)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\bigl(1-\sin^2 h\bigr)-1}{h\bigl(\sqrt{1-\sin^2 h}+1\bigr)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h\bigl(\sqrt{1-\sin^2 h}+1\bigr)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{\sqrt{1-\sin^2 h}+1}\\
&= 1\cdot\frac{0}{2}=0
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 3.2

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos h-\sin x\cdot\sin h-\cos x}{h} \qquad \text{(FBT S. 99)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin h}{h} \qquad \text{(FBT S. 61)}\\
&= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \qquad \text{(FBT S. 61)}\\
&= \cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x \qquad \text{(FTB S. 62)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 3.3

$f'(x)=1/x \quad \Rightarrow \quad f'(5)=\frac{1}{5}$

Aufgabe 3.4

$f'(x)=5x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(-2)=5\cdot(-2)^4=5\cdot 16=80$

Aufgabe 3.5

$f'(x)=-\sin x \quad \Rightarrow \quad f'(\pi/2)=-\sin(\pi/2)=-1$

Aufgabe 3.6

$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1 = m_t$

$$\begin{aligned} t\colon y &= mx + q \\ 1 &= 1 \cdot 0 + q \\ q &= 1 \\ t\colon y &= x + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(\frac{2}{3}) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} = m_t$

$m_n = -1/m_t = -\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} n\colon y &= mx + q \\ \frac{8}{27} &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + q \\ \frac{8}{27} &= -\frac{1}{2} + q \\ q &= \frac{43}{54} \\ n\colon y &= -\frac{3}{4}x + \frac{43}{54} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.8

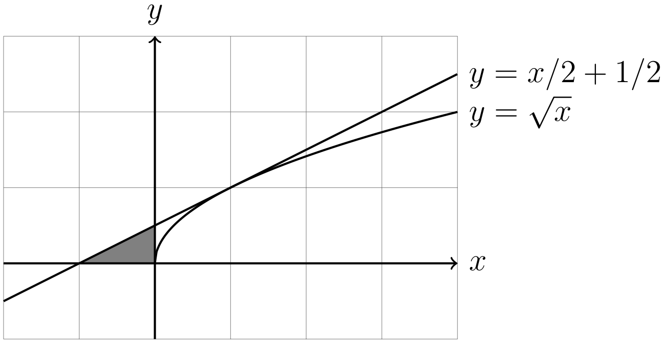
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + q \\ 1 &= \frac{1}{2} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \\ t\colon y &= \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ordinatenabschnitt von t: $q = \frac{1}{2}$

Nullstelle von t: $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

Flächeninhalt: $A = \dfrac{1}{2} \cdot |-1| \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$



Aufgabe 3.9

$f'(x) = -1/x^2 = -1.44$

$x^2 = 1/1.44$

$$x = \pm 1/1.2 = \pm 1/(6/5) = \pm 5/6$$

Aufgabe 3.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

$f'(-100) = 7 \cdot (-100)^6 > 0 \Rightarrow$ monoton wachsend

(c) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$\Rightarrow f'(0.7) = 1/0.7 > 0 \Rightarrow$ monoton wachsend

(d) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$\Rightarrow f'(4) = -1/16 < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

(e) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$f'(-4) = -1/(-4)^2 < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

Aufgabe 3.11

(a) $f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \mathrm{e}^x$

(b) $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\sin x$

(c) $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -1/x^2$

(e) $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0$

Aufgabe 3.12

Die Steigungen von Tangente und Gerade müssen an der gesuchten Stelle übereinstimmen.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3 \\
2x &= 3 \\
x &= 3/2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.13

(a) $f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$

$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57°$

(b) $f(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1/x^2$

$\varphi = \arctan(-1/(-1)^2) = -45°$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x$

$\varphi = \arctan(\mathrm{e}^{-2}) = 7.71°$

(d) $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x$

$\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = 30°$

(e) $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

$\varphi = \arctan(-\sin\frac{\pi}{6}) = -26.57°$

Aufgabe 4.1

$f'(x) = 2x + 3x^2$

Aufgabe 4.2

$f'(x) = \cos x - \sin x$

Aufgabe 4.3

$f'(x) = 2 + \tan^2 x$

Aufgabe 4.4

$f'(t) = \dfrac{1}{t}$

Aufgabe 4.5

$f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$

Aufgabe 4.6

$f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x + 3x^2$

Aufgabe 4.7

$a'(z) = 1 + 2z + 3z^2$

Aufgabe 4.8

$f'(x) = \dfrac{1}{\ln 10} \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 4.9

$f'(x) = 1$

Aufgabe 4.10

$f'(x) = -4x^{-5} - 6x^{-7}$

Aufgabe 4.11

$f'(x) = 6\,x$

Aufgabe 4.12

$f'(x) = 5\,\mathrm{e}^x$

Aufgabe 4.13

$f'(x) = -4\,\cos x$

Aufgabe 4.14

$g'(x) = \pi\,\dfrac{1}{x}$

Aufgabe 4.15

$f'(x) = \sin x$

Aufgabe 4.16

$f'(x) = 0$

Aufgabe 4.17

$f'(t) = -\dfrac{5}{t^2}$

Aufgabe 4.18

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 4.19

$f'(x) = 2^x$

Aufgabe 4.20

$h'(s) = -15\,s^{-6}$

Aufgabe 4.21

$f'(x) = 4x + 3$

Aufgabe 4.22

$f'(x) = 3x^2 - 14x$

Aufgabe 4.23

$f'(x) = x^3 - x^2 + 5x + 6$

Aufgabe 4.24

$f'(x) = \frac{10}{3}x^4 + \frac{16}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$

Aufgabe 4.25

$f'(x) = 3\sqrt{2}\,x^2 - 2\pi\,x + \mathrm{e}$

Aufgabe 4.26

$g'(x) = 0.5\,x^4 - 0.75\,x^2 - 0.3$

Aufgabe 4.27

$f'(x) = 28x + 6$

Aufgabe 4.28

$f(t) = t^2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 2t$

Aufgabe 4.29

$h(x) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow h'(x) = 2x + 4$

Aufgabe 4.30

$f(x) = 3(x^2 - x - 2) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f'(x) = 6x - 3$

Aufgabe 4.31

$$\begin{aligned} f'(t) &= (6t + 1)(1 - t^2) + (3t^2 + t)(-2t) \\ &= \ldots = -12t^3 - 3t^2 + 6t + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.32

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 + 2x)(x^3 + 4x - 3) + (1 + 3x + x^2)(3x^2 + 4) \\ &= \ldots = 5x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 18x - 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.33

$g'(x) = \cos x - x \cdot \sin x$

Aufgabe 4.34

$f'(t) = 2t \cdot \sin t + (t^2 - 1) \cdot \cos t$

Aufgabe 4.35

$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x \overset{\text{Trig.}}{=} \cos(2x)$

Aufgabe 4.36

$h'(t) = (-\sin t) \cdot \cos t + \cos t \cdot (-\sin t) = -2 \sin t \cdot \cos t \overset{\text{Trig.}}{=} -2 \sin(2t)$

Aufgabe 4.37

$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

Aufgabe 4.38

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$$

Aufgabe 4.39

$h'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^x$

Aufgabe 4.40

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x + \tan x \cdot (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} - \tan x \cdot \sin x$$

Aufgabe 4.41

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 4.42

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x+1) - 3x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x + 3 - 3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 4.43

Hier ist es möglich und vorteilhaft, vor dem Ableiten die Funktion zu vereinfachen:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$$

Aufgabe 4.44

Hier ist es möglich und vorteilhaft, vor dem Ableiten die Funktion zu vereinfachen:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x} = x^2 + 2x - \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + 2 + \frac{4}{x^2}$$

Zur Erinnernung: $\left[\frac{1}{x}\right]' = \left[x^{-1}\right]' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Aufgabe 4.45

$$f'(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x + 5) - x^4 + 3x^2 + 2}{(x + 5)^2} = \cdots = \frac{3x^4 + 20x^3 + 3x^2 + 30x - 2}{(x + 5)^2}$$

Aufgabe 4.46

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - 2)(x^2 + 3x + 2) - (x^2 - 2x + 1)(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 2)^2} \\ &= \frac{\left[2x^3 + 6x^2 + 4x - 2x^2 - 6x - 4\right] - \left[2x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 6x + 2x + 3\right])}{(x^2 + 3x + 2)^2} \\ &= \frac{\left[2x^3 + 4x^2 - 2x - 4\right] - \left[2x^3 - x^2 - 4x + 3\right]}{(x^2 + 3x + 2)^2} = \frac{5x^2 + 2x - 7}{(x^2 + 3x + 2)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.47

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x \cdot x^2 - \mathrm{e}^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x\left(\mathrm{e}^x \cdot x - 2 \cdot \mathrm{e}^x\right)}{x^4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x \cdot x - 2 \cdot \mathrm{e}^x}{x^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.48

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder: $f'(x) = \cdots = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Aufgabe 4.49

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Aufgabe 4.50

$$f'(x) = \frac{\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \mathrm{e}^x - \left(x \cdot \ln x\right) \cdot \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} = \frac{(\ln x + 1)\mathrm{e}^x - x \cdot \ln x \cdot \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x(\ln x + 1 - x \cdot \ln x)}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} = \frac{\ln x + 1 - x \cdot \ln x}{\mathrm{e}^x}$$

Aufgabe 4.51

$f'(x) = 7 \cdot (5x-3)^6 \cdot 5 = 35 \cdot (5x-3)^6$

Aufgabe 4.52

$f'(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^{3x}$

Aufgabe 4.53

$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

Aufgabe 4.54

$f'(x) = \dfrac{4}{\cos^2(4x)} \; \big[= 4 + 4\tan^2(4x) \big]$

Aufgabe 4.55

$f'(x) = \dfrac{7}{2\sqrt{7x-3}}$

Aufgabe 4.56

$f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$

Aufgabe 4.57

$f'(x) = (-1) \cdot \big(-\sin(-x) \big) = \sin(-x) \overset{\text{Trig.}}{=} -\sin x$

Aufgabe 4.58

$f'(x) = 2x \cdot \big(-\sin(x^2) \big) = -2x \cdot \sin(x^2)$

Aufgabe 4.59

$f'(x) = (2x+3)\cos(x^2+3x+1)$

Aufgabe 4.60

$f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x \overset{\text{Trig.}}{=} \sin(2x)$

Aufgabe 4.61

$$f'(x) = 10x - 3\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}$$

Aufgabe 4.62

$$f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$$

Aufgabe 4.63

$$f'(x) = \cos x \cdot 2 \cdot \sin x = 2\sin x \cos x$$

Aufgabe 4.64

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 4.65

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3 + 1) \cdot \ln x + (x^4 + x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= (4x^3 + 1) \cdot \ln x + x^3 + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.66

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Aufgabe 4.67

$$f'(x) = -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$$

Aufgabe 4.68

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^{-1} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2 \cdot \ln x}{x^6} \\ &= \frac{x^2(1 - 3\ln x)}{x^6} = \frac{1 - 3\ln x}{x^4} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.69

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Aufgabe 4.70

$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

Aufgabe 4.71

$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin x + x^4 \cdot \cos x$

Aufgabe 4.72

$$f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x+\pi)} = \frac{5}{\cos^2(5x)}$$

oder

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot \left[1 + \tan^2(5x+\pi)\right] \\ &= 5 + 5\tan^2(5x+\pi) = 5 + 5\tan^2(5x) \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Vereinfachungen folgen aus den Reduktionsformeln für $x+\pi$: (FTB S. 99)

$$\begin{aligned} \sin(x+\pi) &= -\sin(x) \\ \cos(x+\pi) &= -\cos(x) \\ \tan(x+\pi) &= \tan(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 4.73

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

Aufgabe 4.74

$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{(x^2)}$

Aufgabe 4.75

$f'(x) = \mathrm{e}^x \cdot 2\mathrm{e}^x = 2\left(\mathrm{e}^x\right)^2 = 2\mathrm{e}^{2x}$

Aufgabe 4.76

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Aufgabe 4.77

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 - 14x) \cdot 8(x^3 - 7x^2 + 5)^7 \\ &= 8(3x^2 - 14x)(x^3 - 7x^2 + 5)^7 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.78

$f'(x) = -2x^{-3}$

oder

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

Aufgabe 4.79

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1+x)$$

Aufgabe 4.80

$$f'(x) = 2 \cdot \mathrm{e} \cdot x + \frac{1}{\mathrm{e}^2 \cdot x^2}$$

Aufgabe 4.81

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 2x^3}{4\mathrm{e}^x} = \frac{3x^2 - x^3}{2\mathrm{e}^x}$$

Aufgabe 4.82

$$f'(x) = \frac{2\sin x}{(\cos x)^3}$$

Aufgabe 4.83

$$f'(x) = 2\cos(2x)$$

Aufgabe 4.84

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2+1}\ln(x+1) + \mathrm{e}^{x^2+1} \cdot \frac{1}{x+1}$$

Aufgabe 4.85

$$f'(x) = -14\cos x - 6x$$

Aufgabe 4.86

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{x^2} - \frac{1}{\pi}$$

Aufgabe 4.87

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\ &= \frac{-2x - 2x^2 - 2x + 2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{-4x}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{-4x}{1-x^4} = \frac{4x}{x^4-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.88

$f'(x) = \cos x \cdot \ln 2 \cdot 2^{\sin x}$

Aufgabe 4.89

$$f'(x) = \frac{12x^2 + 10x + 15}{(x^2 + 3x)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{4x^2 - 5}}$$

Aufgabe 4.90

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \mathrm{e}^{2-a^{-1}x} + (x - a)(-a^{-1})\mathrm{e}^{2-a^{-1}x} \\ &= 1 \cdot \mathrm{e}^{2-a^{-1}x} + (1 - a^{-1}x)\mathrm{e}^{2-a^{-1}x} \\ &= (2 - a^{-1}x)\mathrm{e}^{2-a^{-1}x} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.91

$f'(x) = 2x - 2$
$f''(x) = 2$
$f'''(x) = 0$

Aufgabe 4.92

$f'(x) = 3x^2 + 6x - \sqrt{2}$
$f''(x) = 6x + 6$
$f'''(x) = 6$

Aufgabe 4.93

$f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$
$f''(x) = 3x^2 - 3x$
$f'''(x) = 6x$

Aufgabe 4.94

$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f^{(4)}(x) = \sin x$

Aufgabe 4.95

$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$

$f'''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

$f^{(4)}(x) = \mathrm{e}^{-x}$

Aufgabe 4.96

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

$f^{(4)}(x) = 0$

Aufgabe 5.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x+1 & \text{falls } -5 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \leq x \end{cases}$$

(a) $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$

(b) $f(-10) = (-10)^2 = 100$

(c) $f(4) = 2\sqrt{4} = 4$

(d) $f(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$

(e) $f(-5) = 4 \cdot (-5) + 1 = -19$

Aufgabe 5.2

Ja, da alle Polynomfunktionen stetig sind.

Aufgabe 5.3

Ja, denn

- $f(0) = \sqrt{0^2} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$

Aufgabe 5.4

Nein, da

- $f(-1) = 1/(-1+1) = 1/0$ nicht definiert ist

Aufgabe 5.5

Ja, denn es handelt sich um eine Verkettung zweier stetiger Funktionen.

Aufgabe 5.6

Ja, denn

- $f(3) = 4 \cdot 3 - 5 = 7$
- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 4x - 5 = 7$
- $\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x + 1) = 7$

Aufgabe 5.7

Ja, denn

- $f(1) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

Aufgabe 5.8

Nein, denn

- $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-1/x} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty$

Aufgabe 5.9

f ist stetig auf dem ganzen Definitionsbereich $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ stetig.

Aufgabe 5.10

Die Funktion f ist nicht stetig an der Stelle $x = 3$

Aufgabe 5.11

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} f(x) \\
\lim_{x\to 2^-} (2x^2 + 3x + 1) &= \lim_{x\to 2^+} (x^3 + ax - 4) \\
8 + 6 + 1 &= 8 + 2a - 4 \\
11 &= 2a \\
a &= 5.5
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1$

$f(0) = 1 \quad$ (ok)

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$x \leq 0$: $f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x = 1$

$x > 0$: $f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \quad$ (ok)

$\Rightarrow f$ an der Stelle $x = 0$ differenzierbar.

Aufgabe 5.13

Die Funktionswerte der Teilfunktionen müssen an der Stelle $x = 4$ übereinstimmen:

$$\begin{aligned} f(4) &= \lim_{x \to 4^-} f(x) \\ 2a + b &= 16 + 4b + a \\ a - 3b &= 16 \end{aligned}$$

Die Steigungen der Teilfunktionen müssen an der Stelle $x = 4$ übereinstimmen:

für $x < 4$ gilt: $f'(x) = 2x + b$

für $x \geq 4$ gilt: $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x \to 4^-} f'(x) \\ a/4 &= 8 + b \\ a &= 32 + 4b \\ a - 4b &= 32 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{l} a - 3b = 16 \\ a - 4b = 32 \end{array} \right|$ hat die Lösung $a = -32$, $b = -16$

Aufgabe 6.1

$f(x) = x^2$ ist in $I = (-\infty, 0]$ monoton fallend, da $f'(x) = 2x < 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 6.2

$f(x) = \sqrt{x}$ ist in $I = (0, \infty)$ monoton wachsend, da $f'(x) = 1/2\sqrt{x} > 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 6.3

$f(x) = 1/x$ ist in $I = (-\infty, 0)$ monoton fallend, da $f'(x) = -1/x^2$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 6.4

$f(x) = x^3$ ist in $I = \mathbb{R}$ monoton wachsend, da $f'(x) = 3x^2 > 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 6.5

$f(x) = \sin x$ ist in $I = [\pi, 2\pi]$ nicht monoton, da $f'(x) = \cos x$ in I sowohl positive wie auch negative Werte annimmt.

Aufgabe 6.6

f ist monoton fallend in $I = \mathbb{R}$, da $f'(x) = -2 < 0$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 6.7

f ist nicht monoton in $I = \mathbb{R}$, da $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ positiv für $x > 0$ und negativ für $x < 0$.

Aufgabe 6.8

f ist monoton fallend in $I = [1, 3]$, da $f'(x) = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5) < 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 6.9

$f(x) = \ln x$ ist monoton wachsend in $I = (0, \infty)$, da $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 6.10

$f'(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

horizontale Tangente bei: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$

Vorzeichentabelle:

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Aufgabe 6.11

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2$

horizontale Tangente bei: $x_1 = x_2 = 2$

Vorzeichentabelle:

	$-\infty < x < 2$	$2 < x < \infty$
$x-2$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

Aufgabe 6.12

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$

horizontale Tangente bei: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Aufgabe 6.13

$f'(x) = 1 - \sin x$

Stellen mit horizontaler Tangente: $x_k = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Wegen $-1 \leq \sin x < 1$ gilt $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend.

Aufgabe 7.1

ungerade

Aufgabe 7.2

gerade

Aufgabe 7.3

gerade

Aufgabe 7.4

gerade

Aufgabe 7.5

gerade und ungerade

Aufgabe 7.6

gerade

Aufgabe 7.7

gerade

Aufgabe 7.8

ungerade

Aufgabe 7.9

ungerade

Aufgabe 7.10

gerade

Aufgabe 7.11

ungerade

Aufgabe 7.12

ungerade

Aufgabe 7.13

gerade

Aufgabe 7.14

gerade

Aufgabe 7.15

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.16

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.17

gerade

Aufgabe 7.18

ungerade

Aufgabe 7.19

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.20

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.21

gerade

Aufgabe 7.22

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.23

ungerade

Aufgabe 7.24

gerade

Aufgabe 7.25

ungerade

Aufgabe 7.26

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.27

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.28

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.29

gerade

Aufgabe 7.30

gerade

Aufgabe 7.31

gerade

Aufgabe 7.32

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.33

gerade

Aufgabe 7.34

ungerade

Aufgabe 7.35

ungerade

Aufgabe 7.36

gerade

Aufgabe 7.37

gerade

Aufgabe 7.38

gerade

Aufgabe 7.39

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.40

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.41

gerade

Aufgabe 7.42

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.43

weder gerade noch ungerade

Aufgabe 7.44

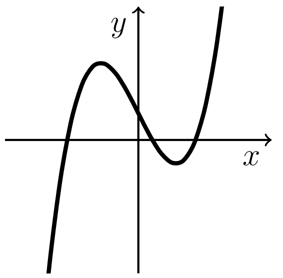
ungerade

Aufgabe 7.45

gerade

Aufgabe 8.1

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$



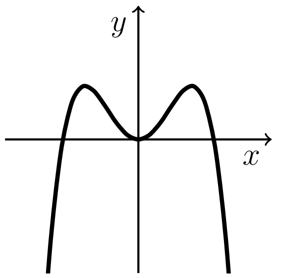
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$

$\Rightarrow$ Ja

Aufgabe 8.2

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$



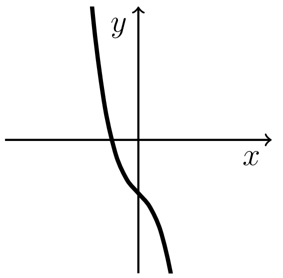
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{8}x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{8}x^4 = +\infty$

$\Rightarrow$ Nein

Aufgabe 8.3

$f(x) = -x^3 - x - 2$



$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$

$\Rightarrow$ Ja

Aufgabe 8.4

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

Aufgabe 8.5

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$

Aufgabe 8.6

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x^6\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x^6\right) = -\infty$$

Aufgabe 8.7

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x^3) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^3) = -\infty$$

Aufgabe 8.8

$f(x) = (x-1)(2-x)(3-x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)(2-x)(3-x) = (+\infty)\cdot(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)(2-x)(3-x) = (-\infty)\cdot(+\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

Aufgabe 8.9

Da der Grad des Zähler- und des Nennerpolynoms gleich 1 ist, hat die Funktion f eine horizontale Asymptote:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x}{x} = \lim_{|x|\to\infty} 1 = 1 \qquad \text{(horizontale Asymptote: } y = 1\text{)}$$

Aufgabe 8.10

Da der Grad des Zählerpolynoms grösser ist als der des Nennerpolynoms, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$(x^2 + 2x + 3) : (x + 2) = x + \frac{3}{x+2} \qquad \text{[ohne Lösungsweg]}$$

Die asymptotische Näherungsfunktion von $f(x)$ ist also $g(x) = x$

Aufgabe 8.11

Da der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist, als der Grad des Nennerpolynoms, streben die Funktionswerte für $|x| \to \infty$ gegen Null

Horizonale Asymptote: $y = 0$

Aufgabe 8.12

Da der Grad des Zählerpolynoms grösser ist als der des Nennerpolynoms, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$(4x^2 - 4x + 5) : (2x - 1) = 2x - 1 + \dfrac{4}{2x - 1}$ [ohne Lösungsweg]

Die asymptotische Näherungsfunktion von $f(x)$ ist also $g(x) = 2x - 1$

Aufgabe 8.13

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Aufgabe 8.14

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{|x|}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{|x|}\right) = \ln 2$$

Aufgabe 8.15

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2} = 0$$

Aufgabe 8.16

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\mathrm{e}^x \cdot \sin(x)\right] = 0$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\mathrm{e}^x \cdot \sin(x)\right]$ nicht definiert!

Aufgabe 9.1

(a) $3 - 7x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3/7$

(b) $0 = x(x - \sqrt{3}) \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3}$

(c) $D = 37;\ x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{37}}{2},\ x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{37}}{2}$

(d) $D = -4 \quad \Rightarrow \quad$ keine Nullstellen

(e)
$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$
$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$$

(f) $x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x - 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$

Aufgabe 9.2

(a) $x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = -5,\ x_4 = -\frac{1}{2},\ x_5 = \sqrt{2},\ x_6 = -\pi$

(b) Nullstellen des Zählers: 2, 1.5, -7

Nullstellen des Nenners: 0, $\frac{3}{2}$, 2

Nullstellen von f: $x_1 = 2,\ x_2 = -7$

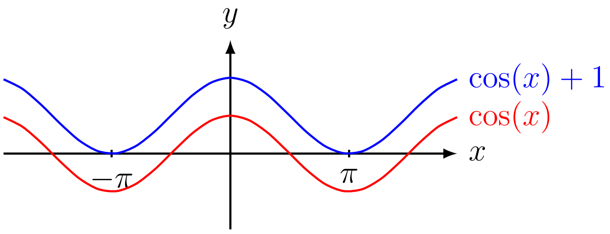
Aufgabe 9.3

(a) $\sin(2x) = 0$
$$2x_k = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$x_k = k \cdot \tfrac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) $\cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 0$
$$\tfrac{1}{3}x_k + 1 = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$x_k = \tfrac{3}{2}\pi + 3k \cdot \pi - 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(c) $\tan(4 - x) = 0$
$$(4 - x_k) = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$-x_k = k \cdot \pi - 4 \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$x_k = k \cdot \pi + 4 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 9.4



$$\begin{aligned}
\cos x + 1 &= 0 \\
\cos x &= -1 \\
\cos x &= \cos(\pi + k \cdot 2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
x_k &= \pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.5

(a)
$$\begin{aligned}
\ln x - 1 &= 0 \\
\ln x &= 1 \\
x &= \mathrm{e}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\ln(x^2 - 5x + 5) &= 0 \\
x^2 - 5x + 5 &= 1 \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
(x-1)(x-4) &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.6

(a)

x		-2	-1	2
1	1	-1	-2	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x-1)$ ein Linearfaktor.

$$\begin{aligned}
(x-1)(x^2 - x - 2) &= 0 \\
(x-1)(x-2)(x+1) &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 2 \\
x_3 &= -1
\end{aligned}$$

(b)

x		-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x-1)$ ein Linearfaktor.

$$
\begin{aligned}
(x-1)(x^2-x-6) &= 0 \\
(x-1)(x+2)(x-3) &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= -2 \\
x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9.7

(a) $f(0) = 3$

(b) $f(0) = 16$

(c) $f(0) = -2/3$

(d) $f(0) = 2$

(e) $f(0) = 1$

(f) $f(0) = \ln 5$

Aufgabe 9.8

(a) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$

(b) $x = 1$

(c) Zähler: 1, 3; Nenner: 2, −1, 1; gesamt: $x = 3$

(d) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -2$

Bei mehrfachen Nullstellen, treten oft Rundungsfehler auf, die korrigiert werden müssen.

Aufgabe 9.9

(a) `prgmF`: $\mathtt{e}^{(-\mathtt{X})} - \mathtt{X/2} \to Y$; $x \approx 0.8526(000977)$

(b) `prgmF`: $\mathtt{sin(X)} - \mathtt{X}^{-1} \to Y$; $x \approx 1.114157(677)$

(c) `prgmF`: $\mathtt{X}^{\mathtt{X}} - \sqrt{\mathtt{X}} \to Y$; $x \approx 0.49999(973707)$

Aufgabe 10.1

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$\begin{array}{lcl}
f^{(0)}(x) = \sin x & \Rightarrow & f^{(0)}(0) = 0 \\
f^{(1)}(x) = \cos x & \Rightarrow & f^{(1)}(0) = 1 \\
f^{(2)}(x) = -\sin x & \Rightarrow & f^{(2)}(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) = -\cos x & \Rightarrow & f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = 0 \\
\ldots = \ldots & \Rightarrow & \ldots = \ldots
\end{array}$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= 1 \cdot x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \ldots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.2

(a) $$\begin{array}{lcl}
f^{(0)}(x) = \ln x & \Rightarrow & f^{(0)}(1) = 0 \\
f^{(1)}(x) = x^{-1} & \Rightarrow & f^{(1)}(1) = 1 \\
f^{(2)}(x) = -x^{-2} & \Rightarrow & f^{(2)}(1) = -1 \\
f^{(3)}(x) = 2x^{-3} & \Rightarrow & f^{(3)}(1) = 2 = 2! \\
f^{(4)}(x) = -6x^{-4} & \Rightarrow & f^{(4)}(1) = -6 = -3! \\
f^{(5)}(x) = 24x^{-5} & \Rightarrow & f^{(5)}(1) = 24 = 4! \\
\ldots\ldots & \Rightarrow & \ldots = \ldots
\end{array}$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\begin{aligned}
\ln(x) &= 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{2!}{3!} \cdot (x-1)^3 - \ldots \\
&= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^{k+1}}{k+1}
\end{aligned}$$

mit der Substitution $x - 1 \to x$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\ln(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}
\end{aligned}$$

Bei der letzte Umformung wird die Summe bei $k = 1$ statt bei $k = 0$ gestartet, weshalb im allgemeinen Summanden zum Ausgleich k durch $k - 1$ ersetzt werden muss. Dies führt zu einer etwas einfachere Formel. Beachte $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$.

(b) $\ln(2) = \ln(1+1) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,\frac{x^k}{k}$$

n	s_n
10	0.64563
20	0.66877
30	0.67676
40	0.68080
...	...
198	0.69063
199	0.69565
200	0.69065

erst zwei signifikante Stellen.

Aufgabe 10.3

$$f^{(0)}(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \tfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = \tfrac{1}{2}$$

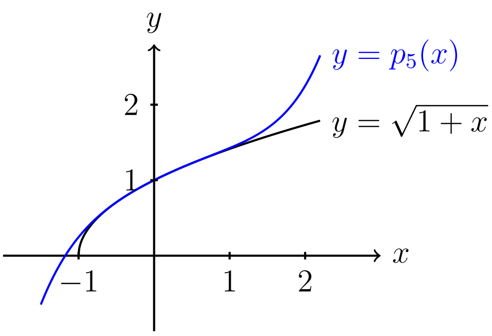
$$f^{(2)}(x) = -\tfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \qquad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = -\tfrac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \tfrac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \qquad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = \tfrac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\tfrac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}} \qquad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = -\tfrac{15}{16}$$

$$f^{(5)}(x) = \tfrac{105}{32}(1+x)^{-\frac{9}{2}} \qquad \Rightarrow \quad f^{(5)}(0) = \tfrac{105}{32}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4\cdot 2!}\,x^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}\,x^3 - \frac{15}{16\cdot 4!}\,x^4 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{16}\,x^3 - \frac{5}{128}\,x^4 + \frac{7}{256}\,x^5 - \dots\end{aligned}$$



Aufgabe 10.4

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \mathrm{e}^x \\
x^2 &\approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\
6x^2 &\approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3 \\
0 &\approx x^3 - 3x^2 + 6x + 6 \\
x &\approx -0.69889
\end{aligned}
$$

Zum Vergleich die „exakte" Lösung: -0.7035

Aufgabe 10.5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.6

$$
\begin{aligned}
p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\
+ \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 & \Rightarrow \quad p(1) &= 8 \\
p'(x) &= 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 & \Rightarrow \quad p'(1) &= 17 \\
p''(x) &= 12x^2 + 18x + 2 & \Rightarrow \quad p''(1) &= 32 \\
p'''(x) &= 24x + 18 & \Rightarrow \quad p'''(1) &= 42 \\
p^{(4)}(x) &= 24 & \Rightarrow \quad p^{(4)}(1) &= 24
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 8 + 17(x-1) + \frac{32}{2}(x-1)^2 + \frac{42}{6}(x-1)^3 + \frac{24}{24}(x-1)^4 \\
&= (x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 16(x-1)^2 + 17(x-1) + 8
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11.1

Ableitungen:

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

$f'(x) = 2x - 6$

$f''(x) = 2$

$f'''(x) = 0$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 6 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$f''(3) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(3, -1)$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2 &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung

keine Wendepunkte

Aufgabe 11.2

Ableitungen:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = 12x - 6$

$f'''(x) = 12$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 6x^2 - 6x - 12 &= 0 \\ 6(x^2 - x - 2) &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$f''(-1) = -18 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-1, -11)$

$f''(2) = 18 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(2, -38)$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x - 6 &= 0 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$f'''(\frac{1}{2}) = 12 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}\big(\frac{1}{2}, -\frac{49}{2}\big)$

Aufgabe 11.3

Ableitungen:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$

$f'(x) = x^2 - 2x + 1$

$f''(x) = 2x - 2$

$f'''(x) = 2$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ x_1 = x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$f''(1) = 0 \ldots$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2x - 2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$f'''(1) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}\big(1, \frac{4}{3}\big)$

Aufgabe 11.4

Ableitungen:

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 20$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16$

$f''(x) = 12x^2 + 24x$

$f'''(x) = 24x + 24$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^3 + 12x^2 - 16 &= 0 \\ x^3 + 3x^2 - 4 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 = x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$x = 1$ kann erraten werden. Mit dem Hornerschema oder Polynomdivision erhält man

$x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2$

und damit die zweite Lösung

$f''(1) = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(1, -31)$

$f''(-2) = 48 - 48 = 0 \ldots$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x^2 + 24x &= 0 \\ 12x(x+2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$f'''(0) = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(0, -20)$

$f'''(-2) = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}(-2, -4)$

Aufgabe 11.5

Ableitungen:

$f(x) = x^5 + 15x^3$

$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$

$f''(x) = 20x^3 + 90x$

$f'''(x) = 60x^2 + 90$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 5x^4 + 45x^2 &= 0 \\ 5x^2(x^2+9) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$f''(0) = 0 \ldots$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 20x^3 + 90x &= 0 \\ 10x(2x^2+9) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$f'''(0) = 90 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}(0, 0)$

Aufgabe 11.6

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{2x} = x^2 + 3x - \frac{4}{x}$$
$$f'(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x^2}$$
$$f''(x) = 2 - \frac{8}{x^3}$$
$$f'''(x) = \frac{24}{x^4}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x + 3 + \frac{4}{x^2} &= 0 \\ 2x^3 + 3x^2 + 4 &= 0 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

$x = -2$ kann durch systematisches Probieren gefunden werden (nichtnegative Lösungen kann man gleich ausschliessen):

x		3	0	4
-1	2	1	-1	5
-2	2	-1	2	0

somit: $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$

Der quadratische Faktor hat die Diskriminante $(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15$ und liefert keine weiteren Lösungen.

$$f''(-2) = 2 - \frac{8}{-8} = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(-2, 0)$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2 - \frac{8}{x^3} &= 0 \\ 2x^3 - 8 &= 0 \\ x^3 &= 4 \\ x &= 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

$$f'''\left(4^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{24}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot 4^{\frac{2}{3}} \neq 0$$

$$f\left(4^{\frac{1}{3}}\right) = 4^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} - \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{2}{3}} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{WeP}\left(\sqrt[3]{4}, 3\sqrt[3]{4}\right)$$

Aufgabe 11.7

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - (x^2-5)}{(x-3)^2} = \cdots = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2-6x+5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} \\ &= \frac{(2x-6)(x-3) - 2(x^2-6x+5)}{(x-3)^3} \\ &= \frac{2x^2-12x+18-2x^2+12x-10}{(x-3)^3} \\ &= \frac{8}{(x-3)^3} \end{aligned}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} &= 0 \\ x^2-6x+5 &= 0 \quad (x \neq 3) \\ (x-1)(x-5) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$f''(1) = \frac{8}{(1-3)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \text{ } (x = 1 \text{ ist Maximalstelle})$$

$$f(1) = \frac{1^2-5}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1,2)$$

$$f''(5) = \frac{8}{(5-3)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \text{ } (x = 1 \text{ ist Minimalstelle})$$

$$f(5) = \frac{5^2-5}{5-3} = \frac{20}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(5,10)$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{8}{(x-3)^3} &= 0 \\ 8 &= 0 \quad (x \neq 3) \end{aligned}$$

keine Lösung $\quad \Rightarrow \quad$ keine Wendepunkte

Aufgabe 11.8

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x-4}{(x-7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x-7)^2-(x-4)\cdot 2(x-7)}{(x-7)^4} = \cdots = \frac{1-x}{(x-7)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(-1)(x-7)^3-(1-x)\cdot 3(x-7)^2}{(x-7)^6} = \cdots = \frac{2x+4}{(x-7)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{2(x-7)^4-(2x+4)\cdot 4(x-7)^3}{(x-7)^8} = \cdots = \frac{-6x-30}{(x-7)^5}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{1-x}{(x-7)^2} &= 0 \\ 1-x &= 0 \quad (x \neq 7) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$f''(1) = \frac{2+4}{(1-7)^4} = \frac{6}{(-6)^4} = \frac{1}{6^3} > 0 \ (x = 1 \text{ ist Minimalstelle})$$

$$f(1) = \frac{1-4}{(1-7)^2} = \frac{-3}{6^2} = -\frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}\big(1, -\tfrac{1}{12}\big)$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{2x+4}{(x-7)^4} &= 0 \\ 2x+4 &= 0 \quad (x \neq 7) \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$f'''(-2) = \frac{-6\cdot(-2)-30}{(2-7)^5} = \frac{-18}{(-9)^5} = \frac{2}{9^4} \neq 0 \ (x = -2 \text{ ist Wendestelle})$$

$$f(2) = \frac{-2-4}{(-2-7)^2} = \frac{-6}{(-9^2)} = -\frac{2}{27} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}\big(2, -\tfrac{2}{27}\big)$$

Aufgabe 11.9

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 + 8\sqrt{x} = x^2 + 8x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{8}{2\sqrt{x}} = 2x + 4x^{-\frac{1}{2}}$$

$f''(x) = 2 - 2x^{-\frac{3}{2}}$
$f'''(x) = 3x^{-\frac{5}{2}}$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x + \frac{4}{\sqrt{x}} &= 0 \\ x\sqrt{x} + 2 &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung $\quad\Rightarrow\quad$ keine Extrempunkte

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2 - 2x^{\frac{3}{2}} &= 0 \\ 1 &= x^{\frac{3}{2}} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$f'''(1) = 3 \cdot 1^{\frac{-5}{2}} = 3 \neq 0$
$f'(1) = 1^2 + 8\sqrt{1} = 9$
$\mathrm{WeP}(1, 9)$

Aufgabe 12.1

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

  keine Asymptoten

- *Nullstellen:* $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

  $$\begin{array}{c|c|ccc}
  x & & -6 & 9 & -4 \\
  \hline
  1 & 1 & -5 & 4 & 0 \\
  \hline
  1 & 1 & -4 & 0 & \\
  \hline
  4 & 1 & 0 & &
  \end{array}$$

  $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 4$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = -4$

- *Ableitungen:*

  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
  $f''(x) = 6x^2 - 12$
  $f'''(x) = 6$

- *Extrempunkte:*

  $$\begin{aligned}
  f'(x) &= 0 \\
  3x^2 - 12x + 9 &= 0 \\
  x^2 - 4x + 3 &= 0 \\
  (x-1)(x-3) &= 0 \\
  x_1 &= 1 \\
  x_2 &= 3
  \end{aligned}$$

  $f''(1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(1, 0)$

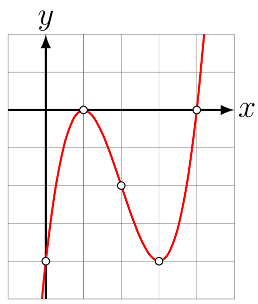
  $f''(3) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(3, -4)$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x - 12 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$f'''(2) = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}(2, -2)$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 12.2

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$$

  keine Asymptoten

- *Nullstellen:* $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$

x		0	-6	8	-3
1	1	1	-5	3	0
1	1	2	-3	0	
1	1	3	0		
-3	1	0			

  $x_1 = x_2 = x_3 = 1,\ x_3 = 3$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = -3$

- *Ableitungen:*

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12$$
$$f'''(x) = 24x$$

- *Extrempunkte:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^3 - 12x + 8 &= 0 \\ x^3 - 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c|ccc} x & & 0 & -3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \\ \hline -2 & 1 & 0 & & \end{array}$$

$f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ TeP?

$f''(-2) = 12 \cdot 4 - 12 = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ TiP$(-2, -27)$

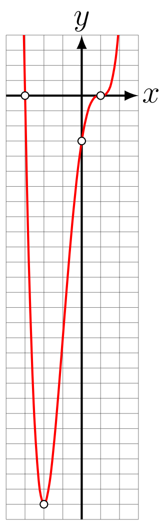
- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x^2 - 12 &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$f'''(1) = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ TeP$(1, 0)$

$f'''(-1) = -24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ WeP$(-1, -16)$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 12.3

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

  vertikale Asymptote: $x = -4$ (mit Vorzeichenwechsel)

  Polynomdivision: $(x^2 + 3x) : (x + 4) = x - 1 + \dfrac{4}{x + 4}$

  Asymptote: $g(x) = x - 1$

- *Nullstellen:*
$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{0}{0+4} = 0$

- *Ableitungen:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+3)(x+4) - (x^2+3x)}{(x+4)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 11x + 12 - x^2 - 3x}{(x+4)^2} = \frac{x^2 + 8x + 12}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+8)(x+4)^2 - (x^2+8x+12) \cdot 2(x+4)}{(x+4)^4} \\ &= \frac{(2x+8)(x+4) - 2(x^2+8x+12)}{(x+4)^3} \\ &= \frac{2x^2 + 16x + 32 - 2x^2 - 16x - 24}{(x+4)^3} = \frac{8}{(x+4)^3} \end{aligned}$$

  Da die 2. Ableitung offensichtlich keine Nullstellen hat, wird das Berechnen der 3. Ableitung obsolet.

- *Extrempunkte:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2} &= 0 \\ x^2+8x+12 &= 0 \quad (x \neq -4) \\ (x+2)(x+6) &= 0 \\ x_1 &= -2 \\ x_2 &= -6 \end{aligned}$$

$$f''(-2) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(-2,-1)$$

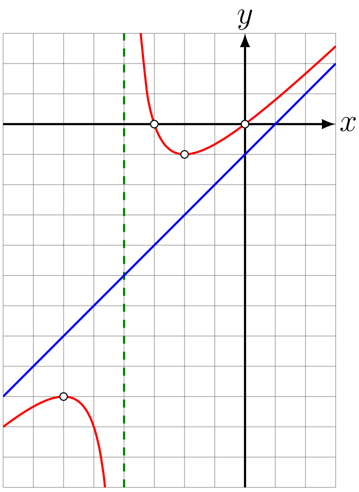
$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-6,-9)$$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{8}{(x+4)^3} &= 0 \\ 8 &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung; also keine Wendepunkte

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 12.4

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x-4)^2}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

- *Symmetrie:* keine

(Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

  vertikale Asymptote: $x = 4$ (ohne Vorzeichenwechsel)

  Polynomdivision: $(x^2 + x - 2) : (x^2 - 8x + 16) = 1 - \dfrac{7x + 18}{x^2 - 8x + 16}$

  horizontale Asymptote: $g(x) = 1$

- *Nullstellen:*
$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x-1)(x+2) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{-2}{16} = -\dfrac{1}{8}$

- *Ableitungen:*
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(x-4)^2 - (x^2+x-2)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} \\ &= \frac{(2x+1)(x-4) - 2(x^2+x-2)}{(x-4)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 7x - 4 - 2x^2 - 2x + 4}{(x-4)^3} = \frac{-9x}{(x-4)^3} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-9(x-4)^3 - (-9x)\cdot 3(x-4)^2}{(x-4)^6} \\ &= \frac{-9(x-4) + 9x \cdot 3}{(x-4)^4} = \frac{18x + 36}{(x-4)^4} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{18(x-4)^4 - (18x+36)\cdot 4(x-4)^3}{(x-4)^8} \\ &= \frac{18(x-4) - 4(18x+36)}{(x-4)^5} = \frac{-54x - 216}{(x-4)^5} \end{aligned}$$

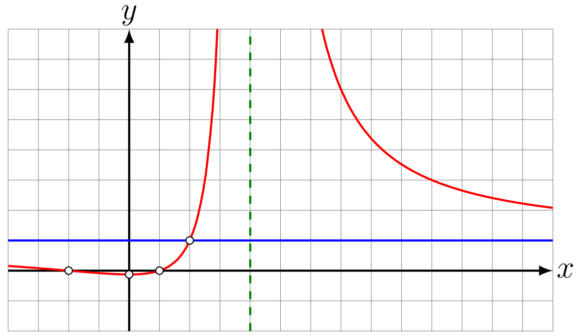
- *Extrempunkte:*
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{-9x}{(x-4)^2} &= 0 \\ -9x &= 0 \quad (x \neq 4) \\ x &= 0 \end{aligned}$$
$$f''(0) = \frac{36}{(-4)^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(0, -1/8)$$
$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-6, -9)$$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{18x+36}{(x-4)^4} &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$f'''(-2) = 1/72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(-2,0)$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 12.5

$f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{(x-4)^2}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

  vertikale Asymptote: $x = 4$ (ohne Vorzeichenwechsel)

  Polynomdivision: $(x^2+x-2) : (x^2-8x+16) = 1 - \dfrac{7x+18}{x^2-8x+16}$

  horizontale Asymptote: $g(x) = 1$

- *Nullstellen:*

$$\begin{aligned} x^2+x-2 &= 0 \\ (x-1)(x+2) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{-2}{16} = -\dfrac{1}{8}$

- *Ableitungen:*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x+1)(x-4)^2 - (x^2+x-2)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} \\
&= \frac{(2x+1)(x-4) - 2(x^2+x-2)}{(x-4)^3} \\
&= \frac{2x^2-7x-4-2x^2-2x+4}{(x-4)^3} = \frac{-9x}{(x-4)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-9(x-4)^3 - (-9x)\cdot 3(x-4)^2}{(x-4)^6} \\
&= \frac{-9(x-4)+9x\cdot 3}{(x-4)^4} = \frac{18x+36}{(x-4)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= \frac{18(x-4)^4 - (18x+36)\cdot 4(x-4)^3}{(x-4)^8} \\
&= \frac{18(x-4)-4(18x+36)}{(x-4)^5} = \frac{-54x-216}{(x-4)^5}
\end{aligned}$$

- *Extrempunkte:*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{-9x}{(x-4)^2} &= 0 \\
-9x &= 0 \quad (x \neq 4) \\
x &= 0
\end{aligned}$$

$$f''(0) = \frac{36}{(-4)^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(0, -1/8)$$

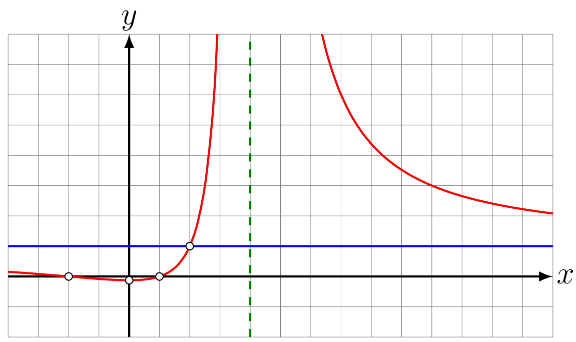
$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(-6, -9)$$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
\frac{18x+36}{(x-4)^4} &= 0 \\
x &= -2
\end{aligned}$$

$$f'''(-2) = 1/72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}(-2, 0)$$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 12.6

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{(x-4)^2}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)
- *asymptotisches Verhalten:*

  vertikale Asymptote: $x = 4$ (ohne Vorzeichenwechsel)

  Polynomdivision: $(x^2 + x - 2) : (x^2 - 8x + 16) = 1 - \dfrac{7x + 18}{x^2 - 8x + 16}$

  horizontale Asymptote: $g(x) = 1$
- *Nullstellen:* $$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x-1)(x+2) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$
- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{-2}{16} = -\dfrac{1}{8}$
- *Ableitungen:*

  $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(x-4)^2 - (x^2+x-2)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} \\ &= \frac{(2x+1)(x-4) - 2(x^2+x-2)}{(x-4)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 7x - 4 - 2x^2 - 2x + 4}{(x-4)^3} = \frac{-9x}{(x-4)^3} \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-9(x-4)^3 - (-9x)\cdot 3(x-4)^2}{(x-4)^6} \\ &= \frac{-9(x-4) + 9x \cdot 3}{(x-4)^4} = \frac{18x + 36}{(x-4)^4} \end{aligned}$$

$$f'''(x) = \frac{18(x-4)^4 - (18x+36)\cdot 4(x-4)^3}{(x-4)^8}$$
$$= \frac{18(x-4) - 4(18x+36)}{(x-4)^5} = \frac{-54x-216}{(x-4)^5}$$

- *Extrempunkte:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{-9x}{(x-4)^2} &= 0 \\ -9x &= 0 \quad (x \neq 4) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$f''(0) = \frac{36}{(-4)^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(0, -1/8)$$

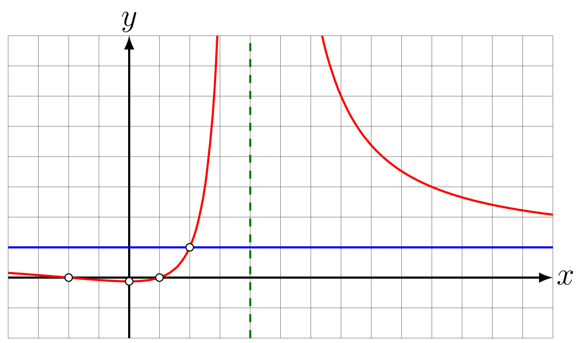
$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-6, -9)$$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{18x+36}{(x-4)^4} &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$f'''(-2) = 1/72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(-2, 0)$$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 13.1

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

$f(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b + 2c + d = 1$
$f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b + c = 0$
$f''(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + 2b = 0$
$f(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 64a + 16b + 4c + d = 0$

Lösung: $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$

Aufgabe 13.2

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

$f(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -8a + 4b - 2c + d = 0$
$f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$
$f'(0) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{3}$
$f(0) = g(0) \quad \Rightarrow \quad d = 2$

Lösung: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + 2$

Aufgabe 13.3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b + 2c + d = 0$
$f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b + c = 0$
$f(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -8a + 4b - 2c + d = 0$
$f'(-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 12a - 4b + c = 1$
Lösung: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

Aufgabe 13.4

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$
$f'(x) = 3ax^2 + b$
$f(-2) = -4 \quad \Rightarrow \quad -8a - 2b = -4 \quad \Rightarrow \quad 4a + b = 2$
$f'(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + b = 0$

Lösung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$

Aufgabe 13.5

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Wenn $f(x)$ durch $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ teilbar ist, so muss f die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ haben.

$f(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -8a + 4b - 2c + d = 0$

$f(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 27a + 9b + 3c + d = 0$

$f(1) = 6 \quad \Rightarrow \quad a + b + c + d = 6$

$f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6a + 2b = 0$

Lösung: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

Aufgabe 13.6

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

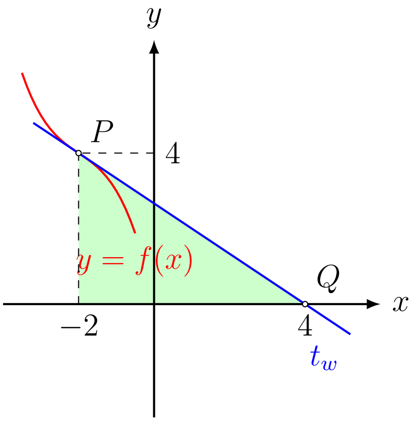
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

- $O(0,0) \in G_f$: $$f(0) = 0$$ $$d = 0$$
- $P(-2,4) \in G_f$: $$f(-2) = 4$$ $$-8a + 4b - 2c + d = 4$$
- $P(-2,4)$ ist Wendepunkt: $$f''(-2) = 0$$ $$-12a + 2b = 0$$
- t_w hat bei $x = -2$ die Steigung m_{PQ}: $$f'(-2) = -\frac{2}{3}$$ $$12a - 4b + c = -\frac{2}{3}$$

Lösung: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{14}{3}x$

Hinweis zu Aufgabe 13.6



$$f'(-2) = m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{4-(-2)} = -\frac{2}{3}$$

Aufgabe 13.7

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$ (Symmetrie berücksichtigt)

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f''(x) = 6ax$$

- t_w in $O(0,0)$ hat die Steigung $m = \frac{-9}{16}$

  $f'(0) = b = \frac{-9}{16}$

- $y = x$ schneidet G_f bei $x = \frac{5}{4}$

  $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{125}{64}a + \frac{5}{4}b = \frac{5}{4}$

Lösung: $f(x) = x^3 - \frac{9}{16}x$

Aufgabe 13.8

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$f(0) = -2$: $\quad d = -2$

$f(2) = 0$: $\quad 8a + 4b + 2c + d = 0$

$f'(3) = 0$: $\quad 27a + 6b + c = 0$

$f''(2) = 0$: $\quad 12a + 2b = 0$

Lösung: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f''(x) = 6x - 12$; $f'''(x) = 6$

Ist $x = 3$ eine Maximalstelle?

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow x = 3$ ist Minimalstelle!

Aufgabe 14.1

Zielfunktion (ZF): $S(x,y) = x^2 + y^2$

Nebenbedingung (NB): $x + y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad y = 36 - x$

NB in ZF einsetzen: $S(x) = x^2 + (36-x)^2$

Extrema:

$$\begin{aligned} S'(x) &= 0 \\ 2x + 2(36-x)\cdot(-1) &= 0 \\ 4x - 72 &= 0 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

$S''(x) = 4 > 0$ (Minimum)

Lösung: Die Zahlen sind 18 und 18

Aufgabe 14.2

Zielfunktion: $A(x,y) = x \cdot y$

Nebenbedingung: $2x + 2y = 20 \quad \Leftrightarrow \quad y = 10 - x$

NB in ZF einsetzen: $A(x) = x(10-x) = 10x - x^2$

Extrema: $$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ 10 - 2x &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Test: $A''(x) = -2 < 0$ (Maximum)

Lösung: $y = 10 - x = 5$
Ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm

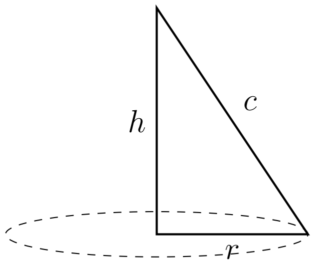
Aufgabe 14.3

Der Legende nach wurde der phönizischen Königin Dido so viel Land zugesprochen, wie sie mit einer Kuhhaut abdecken konnte.

Die schlaue Dido zerschnitt die Kuhhaut in dünne Streifen und bekam so ein Band, mit dem sie ein grosses Stück Land für die Stadt Karthago eingrenzen konnte.

Das (klassische) *isoperimetrische Problem* bezeichnet die Frage, welche Form eine Kurve der Länge l haben muss, damit sie eine Fläche mit maximalem Flächeninhalt umspannt.

Aufgabe 14.4



Zielfunktion: $V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Nebenbedingung: $r^2 + h^2 = 64 \quad \Leftarrow \quad r^2 = 64 - h^2$

NB in ZF einsetzen: $V(h) = \frac{1}{3}\pi(64 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(64h - h^3)$

Extrema:

$$V'(h) = \tfrac{1}{3}\pi\left(64 - 3h^2\right)$$
$$V''(h) = -2\pi h$$

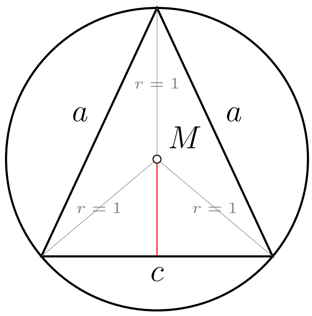
$$\begin{aligned} V'(h) &= 0 \\ 64 - 3h^2 &= 0 \\ h &= \sqrt{\tfrac{64}{3}} \end{aligned}$$

Test: $V''\left(\sqrt{\frac{64}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{64}{3}} < 0$ (Maximum)

Lösung: $r^2 = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$

Das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $h = \sqrt{\frac{64}{3}}$ cm und $r = \sqrt{\frac{128}{3}}$ cm

Aufgabe 14.5



Zielfunktion: $A(c,h) = \dfrac{1}{2} \cdot c \cdot h$

Nebenbedingung:

$$h = 1 + \sqrt{1^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = 1 + \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{c^2}{4}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 - c^2}$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$$A(c) = \frac{c}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 - c^2}\right) = \frac{c}{2} + \frac{c}{4}\sqrt{4 - c^2}$$

Extrema: $A'(c) = 0$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{4-c^2} - \frac{c^2}{4\sqrt{4-c^2}} = 0 \quad || \cdot 4\sqrt{4-c^2}$$

$$2\sqrt{4-c^2} + (4-c^2) - c^2 = 0$$

$$2\sqrt{4-c^2} = 2c^2 - 4$$

$$\sqrt{4-c^2} = c^2 - 2$$

$$4 - c^2 = c^4 - 4c^2 + 4$$

$$0 = c^4 - 3c^2 = c^2(c^2-3)$$

$$c = \sqrt{3}$$

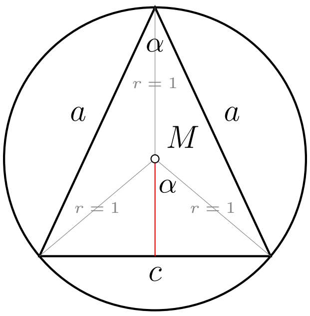
Lösung:

$$h = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4-c^2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4-3} = \frac{3}{2}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

Es handelt sich um ein gleichseitiges Dreieck.

2. Lösung



Zielfunktion: $A(c,h) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$

Nebenbedingungen:

$h = 1 + 1 \cdot \cos\alpha$

$c = 2 \cdot \sin\alpha$

Nebenbedingungn in Zielfunktion einsetzen:

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha) = \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$$

Extrema: $A'(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha(-\sin\alpha) &= 0\\
\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha &= 0\\
\cos\alpha + \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) &= 0\\
2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 &= 0\\
2u^2 + u - 1 &= 0
\end{aligned}$$

$D = 1 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9$

$u_1 = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 60°$

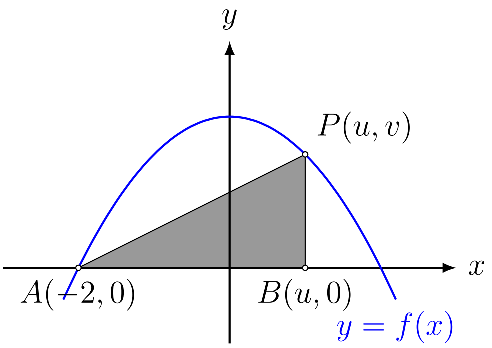
$u_2 = \dfrac{-1-3}{4} = -1 = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 180° \quad \text{(sinnlos)}$

Lösung:

Wegen $\alpha = 60°$ müssen auch die anderen Winkel $60°$ sein. Also handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck mit:

$a = b = c = 2\cdot\sin 60° = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Aufgabe 14.6



Zielfunktion:

$A(x,y) = \frac{1}{2}(2+x)\cdot y$

Nebenbedingung:

$y = 2 - \frac{1}{2}x^2$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = \frac{1}{2}(2+x)\left(2-\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

Extrema: $A'(x) = 0$

$-\frac{3}{4}x^2 - x + 1 = 0$

$3x^2 + 4x - 4 = 0$

$D = 4^2 - 4\cdot 3\cdot(-4) = 64$

$x_1 = (-4+8)/6 = \frac{2}{3}$

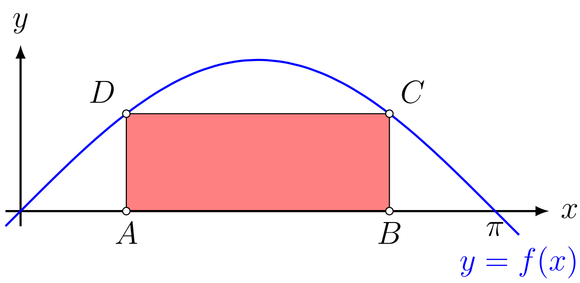
$x_2 = (-4-8)/6 = -2 \quad \text{(sinnlos)}$

$A''(x) = -\frac{3}{2}x - 1$

$A''(\frac{2}{3}) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} - 1 = -2$ (Maximum)

Lösung: $P\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$

Aufgabe 14.7



Zielfunktion:

$A(l, b) = l \cdot b$

Nebenbedingungen:

$l = \pi - 2x$

$h = \sin(x)$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = (\pi - 2x)\sin(x) = \pi \sin(x) - 2x\sin(x)$

Extrema:

$A'(x) = (-2)\sin(x) + (\pi - 2x)\cos(x) = 0$

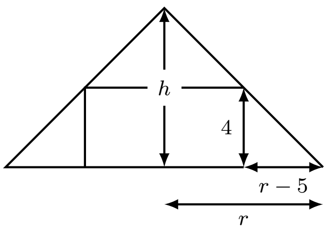
Die Gleichung $-2\sin(x) + (\pi - 2x)\cos(x) = 0$ ist *transzendent*, da sowohl trigonometrische Funktionen als auch der Faktor x in ihr auftreten. Normalerweise sind solche Gleichungen nicht algebraisch lösbar.

Mit einem geeigneten Taschenrechner bestimmt man entweder das Maximimum von $A(x)$ oder die Nullstelle von $A'(x)$ im angegebenen Intervall und erhält $x_{\max} = 0.710$.

Lösung: Für $u = 0.710$ erhält man einen Flächeninhalt von $1.122\,\text{FE}$

Aufgabe 14.8

Achsenquerschnitt von Zylinder und Kegel:



r und h bezeichnen Radius und Höhe des Kegels.

Zielfunktion:

$V(r,h) = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Nebenbedingung:

$$h : r = 4 : (r-5) \quad \text{(1. Strahlensatz)}$$

$$h(r-5) = 4r$$

$$h = \frac{4r}{r-5} \quad (r > 5)$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$V(r) = \dfrac{4\pi r^3}{3(r-5)}$

Extrema:

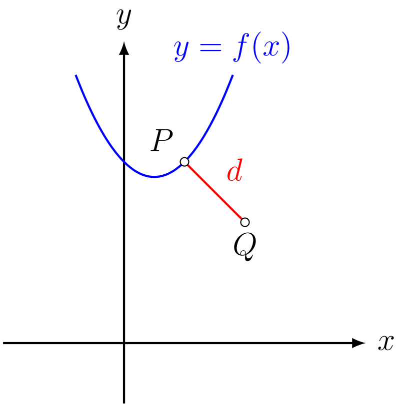
$$V'(r) = \frac{12\pi r^2 \cdot 3(r-5) - 4\pi r^3 \cdot 3}{9(r-5)^2}$$

$$= \frac{36\pi r^3 - 180\pi r^2 - 12\pi r^3}{9(r-5)^2} = \frac{24\pi r^3 - 180\pi r^2}{9(r-5)^2}$$

$$V'(r) = 0$$
$$24\pi r^3 - 180\pi r^2 = 0$$
$$12\pi r^2(2r - 15) = 0$$
$$r_1 = 0 \quad (\text{verletzt } r > 5)$$
$$r_2 = 7.5 \quad (\text{Maximum})$$

Antwort: Der Kegel hat den Radius $r = 7.5$ und die Höhe $h = 12$.

Aufgabe 14.9



Zielfunktion: $d(x,y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$

$D(x,y) = d^2(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$

Nebenbedingung:

$y = x^2 - x + 3$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$$D(x) = (x-2)^2 + (x^2-x+1)^2 \quad = \ldots$$
$$= x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5$$

Extrema:

$D'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 6 = 0$

$D''(x) = 12x^2 - 12x + 8$

$D'(x) = 0$

$x = 1 \quad (x_2$ und x_3 sind komplex)

Test: $D''(1) = 8 > 0$ (Minimum)

Lösung: $P(1,3)$

Lösung mit Lagrange-Multiplikator

Zielfunktion: $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$ Abstand von $Q(2,2)$

NB: $g(x,y) = x^2 - x + 3 - y$ ist erfüllt, wenn $g(x,y) = 0$

Lagrange-Funktion:

$$L(x,y,\lambda) = \underbrace{(x-2)^2 + (y-2)^2}_{f(x,y)} + \lambda \underbrace{(x^2 - x + 3 - y)}_{g(x,y)}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 2(x-2) + \lambda(2x-1) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2(y-2) + \lambda(-1) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = x^2 - x + 3 - y = 0 \quad (3)$$

Aus (1) erhält man $x = \dfrac{\lambda+4}{2\lambda+2}$

Aus (2) erhält man $y = \dfrac{\lambda+4}{2}$

Einsetzen dieser Terme in (3):

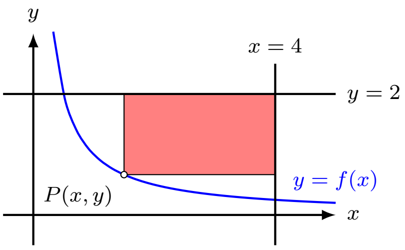
$$\left(\frac{\lambda+4}{2\lambda+2}\right)^2 - \frac{\lambda+4}{2\lambda+2} + 3 - \frac{\lambda+4}{2} = 0$$

$$(\lambda+4)^2 - (\lambda+4)(2\lambda+2) + 3(2\lambda+2)^2 - 2(\lambda+4)(\lambda+1)^2 = 0$$
$$-2\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 12 = 0$$

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = \dfrac{-5 \pm 23\mathrm{i}}{4}$

$\Rightarrow \quad x = 1,\ y = 3$

Aufgabe 14.10



Zielfunktion:

$A(x, y) = (4 - x)(2 - y)$

Nebenbedingung:

$y = 1/x$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = (4 - x)(2 - x^{-1}) = 9 - 2x - 4x^{-1}$

Extrema:
$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -2 + 4x^{-2} &= 0 \\ 2x^{-2} &= 1 \\ x^{-2} &= \frac{1}{2} \\ x^2 &= 2 \\ x &= \sqrt{2} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

Test: $A''(x) = -8x^{-3}$

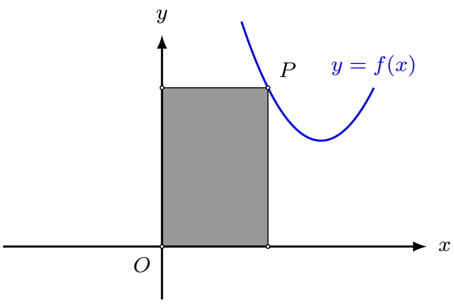
$A''(\sqrt{2}) = -8\big(\sqrt{2}\big)^{-3} < 0$ (Maximum)

Lösung:

Länge: $(4 - x) = 4 - \sqrt{2}$

Höhe: $2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$

Aufgabe 14.11



Zielfunktion:

$A(x, y) = x \cdot y$

Nebenbedingung:

$y = x^2 - 8x + 21$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = x(x^2 - 8x + 21) = x^3 - 8x^2 + 21x$

Extrema:

$A'(x) = 3x^2 - 16x + 21 = 0$

$A''(x) = 6x - 16$

$x_1 = 3,\ x_2 = \frac{7}{3}$

$A''(3) = 2 > 0$ (x_1 ist lokales Minimum)

$A''(\frac{7}{3}) = -2 < 0$ (x_2 ist lokales Maximum)

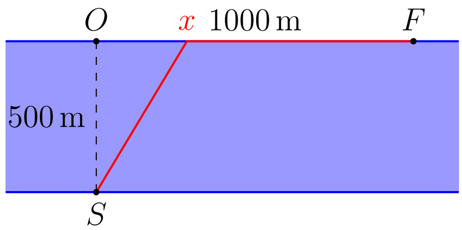
$A(\frac{7}{3}) \approx 18.15$

Werte an den Rändern: $A(0) = 0$

$A(4) = 20$

Lösung: Das Maximum wird im Randpunkt $P(4,5)$ angenommen.

Aufgabe 14.12



$$\overline{v} = \frac{s}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{s}{\overline{v}}$$

Zielfunktion:

$$T(s_1, s_2) = \frac{s_1}{\overline{v}_1} + \frac{s_2}{\overline{v}_2}$$

Nebenbedingungen:

$s_1 = \sqrt{500^2 + x^2}$

$s_2 = 1000 - x$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$$T(x) = \frac{\sqrt{500^2 + x^2}}{50} + \frac{1000 - x}{300} \qquad ([t] = \text{Minuten})$$

Extrema:

$$T'(x) = \frac{1 \cdot 2x}{50 \cdot 2\sqrt{500^2 + x^2}} - \frac{1}{300} = \frac{x}{50\sqrt{500^2 + x^2}} - \frac{1}{300}$$

$$\frac{x}{50\sqrt{500^2+x^2}} - \frac{1}{300} = 0 \quad || \cdot 300\sqrt{500^2+x^2}$$

$$6x - \sqrt{500^2+x^2} = 0$$

$$6x = \sqrt{500^2+x^2}$$

$$36x^2 = 500^2 + x^2$$

$$35x^2 = 500^2$$

$$x = 500/\sqrt{35} \approx 84.51 \text{ m}$$

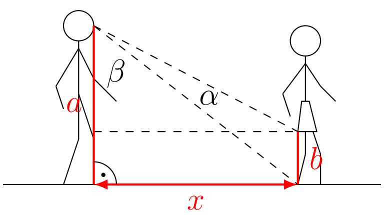
Lösung:

Dauer: $T(84.51) \approx 13.2\,\mathrm{min}$

Streckenlänge:

$s(84.51) = \sqrt{500^2 + 84.51^2} + (1000 - 84.51) \approx 1422.5$ m

Aufgabe 14.13



Zielfunktion:

$\alpha(x, a, b) = (\alpha + \beta) - \beta = \arctan \dfrac{x}{a-b} - \arctan \dfrac{x}{a}$

Nebenbedingung:

$a = 1.78,\ b = 0.6,\ 0 < d < \infty$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$\alpha(x) = \arctan(sx) - \arctan(tx)$ mit $s = 1.18^{-1}$, $t = 1.78^{-1}$

Extrema:

$$\alpha'(x) = 0$$

$$\frac{s}{1+(sx)^2} - \frac{t}{1+(tx)^2} = 0$$

$$s\big[1+(tx)^2\big] = t\big[1+(sx)^2\big]$$

$$s + st^2x^2 = t + ts^2x^2$$

$$st^2x^2 - ts^2x^2 = t - s$$

$$x^2 st(t-s) = t - s \quad (t \neq s)$$

$$x^2 = (st)^{-1}$$

$$x = \sqrt{(st)^{-1}}$$

Lösung:

$s = 1.18^{-1}$, $t = 1.78^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{1.18 \cdot 1.78} = 1.45\,\mathrm{m}$

Aufgabe 15.1

$$\begin{aligned}1 &= -8+4t+t-1\\10 &= 5t\\t &= 2\end{aligned}$$

Aufgabe 15.2

$$\begin{aligned}7 &= 2^2+2t+t^2\\0 &= t^2+2t-3\\0 &= (t-1)(t+3)\\t_1 &= 1\\t_2 &= -3\end{aligned}$$

Aufgabe 15.3

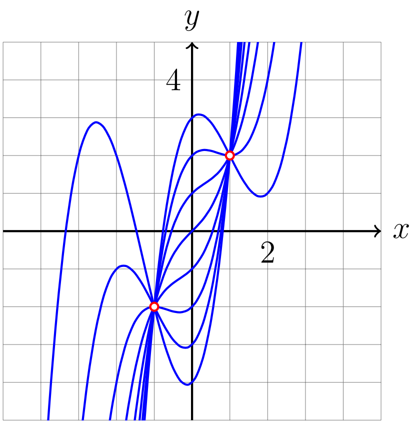
$$\begin{aligned}f_s(x) &= f_t(x) \quad [s \neq t]\\x^3+sx^2+x-s &= x^3+tx^2+x-t\\sx^2-s &= tx^2-t\\sx^2-tx^2-s+t &= 0\\x^2(s-t)-(s-t) &= 0\\(s-t)(x^2-1) &= 0\\x^2-1 &= 0\\x_1 &= 1\\x_2 &= -1\end{aligned}$$

$f_t(1) = 1^3 + t \cdot 1^2 + 1 - t = 1 + t + 1 - t = 2$

$\Rightarrow \quad P_1(1, 2)$

$f_t(-1) = (-1)^3 + t \cdot (-1)^2 - 1 - t = -1 + t - 1 - t = -2$

$\Rightarrow \quad P_2(-1, -2)$



Aufgabe 15.4

$$\begin{aligned}
f_s(x) &= f_t(x) \quad [s \neq t] \\
x^3 + sx - 2s &= x^3 + tx^2 - 2t \\
sx - 2s &= tx - 2t \\
sx - tx - 2s + 2t &= 0 \\
x(s-t) - 2(s-t) &= 0 \\
(s-t)(x-2) &= 0 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der y-Koordinate muss die x-Koordinate in die Funktiongleichung eingesetzt werden:

$f_t(2) = 2^3 + t \cdot 2 - 2 \cdot t = 8 + 2t - 2t = 8$

Alle Kurven der Schar gehen durch den Punkt $P(2, 8)$.

Aufgabe 15.5

Bestimme allgemein die Nullstellen der Funktionenschar $f_t(x) = x^2 - tx - 2t^2$.

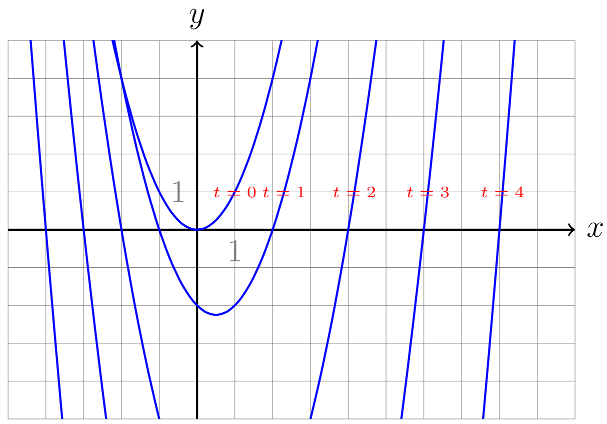
Verwende die Lösungsformel für die quadratische Gleichung.

Das Polynom auf der linken Seite der Gleichung $x^2 - tx - 2t^2 = 0$ hat die Koeffizienten $a = 1$, $b = -t$ und $c = -2t^2$.

Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = t^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2t^2) = 9t^2$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{t + 3t}{2} = 2t$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{t - 3t}{2} = -t$$

Aufgabe 15.5 Graphische Darstellung:



Aufgabe 15.6

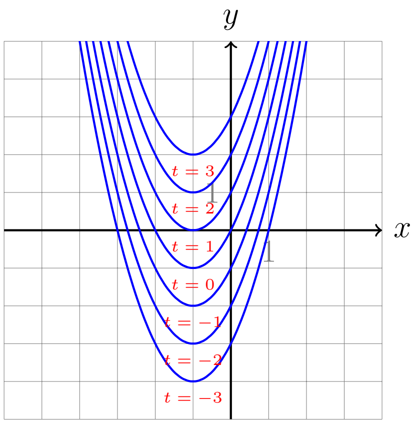
Eine quadratische Gleichung hat genau dann zwei Lösungen, wenn für die Diskriminante $D = b^2 - 4ac > 0$ gilt.

Die quadratische Gleichung $x^2 + 2x + t = 0$ hat die Koeffizienten $a = 1$, $b = 2$, $c = t$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &> 0 \\ 4 - 4t &> 0 \\ 4 &> 4t \\ 1 &> t \end{aligned}$$

Die Funktionenschar hat für $t < 1$ genau zwei Nullstellen.

Beachte: Ungleichungen können wie Gleichungen umgeformt werden, wobei folgende Ausnahme gilt: multipliziert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl (oder dividiert man durch eine negative Zahl), so ändert das Relationszeichen die Richtung.



Aufgabe 15.7

Für welche Werte des Parameters t hat die Funktionenschar $f_t(x) = x^2 + tx + 1$ genau eine Nullstelle?

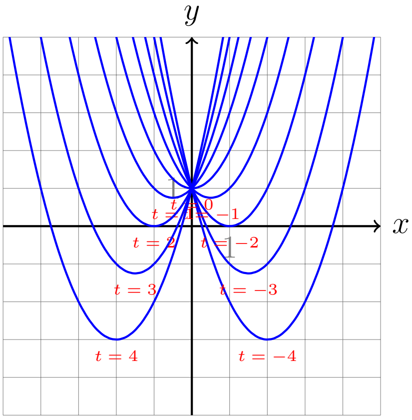
Eine quadratische Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn für die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 0$ gilt.

Koeffizienten: $a = 1$, $b = t$ und $c = 1$.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 &= 0 \\ t^2 - 4 &= 0 \\ t_1 &= -2 \\ t_2 &= 2 \end{aligned}$$

Die Funktionenschar hat für $t = -2$ oder $t = 2$ genau eine Nullstelle.

Aufgabe 15.7



Aufgabe 15.8

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = tx^3 - x^2 + t$ mit $t \in \mathbb{R}$.
Für welchen Wert von t hat die Tangente von f_t an der Stelle $x = 2$ die Steigung 4?

$f_t(x) = tx^3 - x^2 + t$

$f_t'(x) = 3tx^2 - 2x$

$$\begin{aligned} f_t'(2) &= 4 \\ 3t \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 &= 4 \\ 12t &= 8 \\ t &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 15.9

Ableitungen: $$\begin{aligned} f_t(x) &= tx^3 - 3tx \\ f_t'(x) &= 3tx^2 - 3t \\ f_t''(x) &= 6tx \end{aligned}$$

Kandidaten: $$\begin{aligned} f_t'(x) &= 0 \\ 3tx^2 - 3t &= 0 \\ 3t(x^2 - 1) &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Die Extremstellen sind offenbar unhabhängig von t.

Test: $f_t''(x) = 6tx$

$f_t''(-1) = -6t < 0$, da $t > 0$ vorausgesetzt wurde

$f_t''(1) = 6t > 0$, da $t > 0$ vorausgesetzt wurde

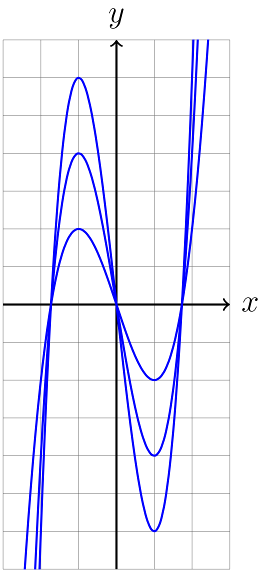
y-Koordinaten:

$y_1 = f_t(-1) = t(-1)^3 - 3t(-1) = -t + 3t = 2t$

$y_2 = f_t(1) = t \cdot 1^3 - 3t = -2t$

Endresultat:

$HoP(-1, 2t),\ TiP(1, -2t)$



Aufgabe 15.10

Die angegebenen Stellen $x = 0$ und $x = t$ in die Funktionsgleichung einsetzen, um zu prüfen, dass es sich um Nullstellen handelt:

$f_t(0) = t^2 \cdot 0 - t \cdot 0^2 = 0$ (ok)

$f_t(t) = t^2 \cdot t - t \cdot t^2 = t^3 - t^3 = 0$ (ok)

Da es sich um eine (nach unten geöffnete) Parabel handelt, kann der Flächeninhalt durch das folgende Integral berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_0^t f_t(x)\mathrm{d}x &= \int_0^t \left(t^2x - tx^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}t^2x^2 - \frac{1}{3}tx^3\right]_0^t \\ &= \left(\frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^4\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6}t^4 \end{aligned}$$

Aufgabe 15.11

Nullstellen:
$$\begin{aligned} x^2 - ax &= 0 \\ x(x-a) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= a \end{aligned}$$

Ableitungen:
$$\begin{aligned} f_a(x) &= x^2 - ax \\ f_a'(x) &= 2x - a \\ f_a''(x) &= 2 \quad \Rightarrow \text{keine Wendepunkte} \end{aligned}$$

Extrempunkte:

Kandidat: $f_a'(x) = 2x - a = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$

Test: $f_a''\left(\dfrac{a}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$ ist Tiefstelle

y-Koordinate:

$y = f_a\left(\dfrac{a}{2}\right) = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - a \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} = -\dfrac{a^2}{4}$

TiP $\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4}\right)$

Aufgabe 15.12

$$\begin{aligned}\text{Nullstellen: } x^3 - 3ax^2 &= 0\\ x^2(x - 3a) &= 0\\ x_1 &= 0 \quad \text{(doppelte Nullstelle)}\\ x_2 &= 3a\end{aligned}$$

Ableitungen:

$f_a(x) = x^3 - 3ax^2$
$f_a'(x) = 3x^2 - 6ax$
$f_a''(x) = 6x - 6a$
$f_a'''(x) = 6$

Extrempunkte

$$\begin{aligned}\text{Kandidaten: } f_a'(x) &= 0\\ 3x^2 - 6ax &= 0\\ 3x(x - 2a) &= 0\\ x_1 &= 0\\ x_2 &= 2a\end{aligned}$$

Test: $f_a''(0) = -6a < 0 \Rightarrow x = 0$ ist Hochstelle

$f_a''(2a) = 6 \cdot 2a - 6a = 6a > 0 \Rightarrow x = 2a$ ist Tiefstelle

y-Koordinaten und Punkte:

$f_a(0) = 0 \Rightarrow HoP(0|0)$

$f_a(2a) = (2a)^3 - 3a(2a)^2 = 8a^3 - 3a \cdot 4a^2 = -4a^3$
$\Rightarrow$ TiP$\big(2a, -4a^3\big)$

Wendepunkt:

$$\begin{aligned}\text{Kandidat: } f_a''(x) &= 0\\ 6x - 6a &= 0\\ 6(x - a) &= 0\\ x_2 &= a\end{aligned}$$

Test: $f_a'''(a) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = a$ ist Wendestelle

y-Koordinate:

$f_a(a) = a^3 - 3a(a)^2 = -2a^3 \Rightarrow WeP\big(a, -2a^3\big)$

Aufgabe 15.13

Ableitungen:

$f_a(x) = ax^2 - x^3$

$f_a'(x) = 2ax - 3x^2$

$f_a''(x) = 2a - 6x$

$f_a'''(x) = -6$

Wendepunkt-Kandidaten: $\quad f_a''(x) = 0$

$$2a - 6x = 0$$

$$2(a - 3x) = 0$$

$$x = \frac{1}{3}a$$

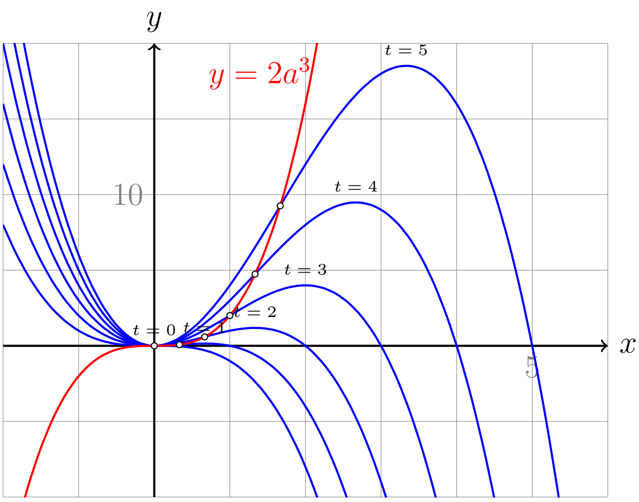
Test: $f_a'''\left(\frac{1}{3}a\right) = -6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}a \quad$ ist Wendestelle

$$y = f_a\left(\frac{1}{3}a\right) = a \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a\right)^3 = \frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{27}a^3 = \frac{2}{27}a^3 \Rightarrow \text{WeP}\left(\frac{1}{3}a\middle|\frac{2}{27}a^3\right)$$

$$x = \frac{1}{3}a \quad \Rightarrow \quad a = 3\ (*)$$

$$y = \frac{2}{27}a^3 \overset{(*)}{=} \frac{2}{27}(3a)^3 = \frac{2}{27} \cdot 27a^3 = 2a^3$$

Die Wendepunkte liegen auf der Kurve mit der Gleichung $y = 2a^3$



Aufgabe 15.14

$$f_t(x) = tx - x^2$$

$$f_t'(x) = t - 2x$$

$$f_t''(x) = -2$$

Kandidaten: $f_t'(x) = 0$

$$t - 2x = 0$$

$$x = \frac{t}{2}$$

Test:

$$f_t''\left(\frac{t}{2}\right) = -2 < 0$$

$x = \frac{t}{2}$ ist in der Tat eine Hochstelle.

Hochpunkt:

$$y = f_t\left(\frac{t}{2}\right) = t \cdot \frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4} = \frac{t^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \text{HoP}\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4}\right)$$

$P(x, y)$ liegt auf der 1. Winkelhalbierenden, wenn $x = y$ gilt.

$$x = y$$

$$\frac{t}{2} = \frac{t^2}{4} \qquad || \cdot 4$$

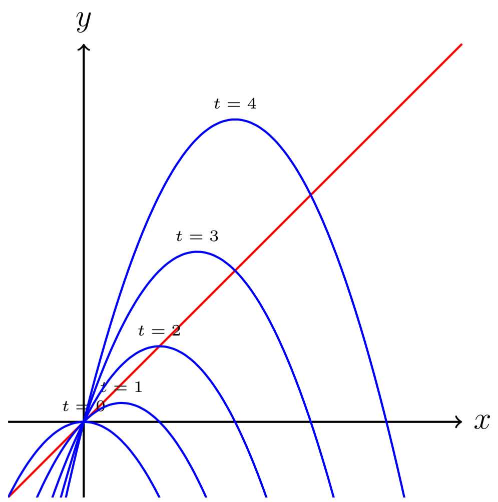
$$2t = t^2$$

$$2t - t^2 = 0$$

$$t(2 - t) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad \text{(entfällt wegen } t > 0\text{)}$$

$$t_2 = 2$$



Aufgabe 16.1

(a) echt gebrochenrational (Grad Zählerpolynom < Grad Nennerpolynom)

(b) unecht gebrochenrational (Grad Zählerpolynom $\geq$ Grad Nennerpolynom)

Aufgabe 16.2

(a) ganzrational (Grad Nennerpolynom: 0)

(b) echt gebrochenrational (Grad Zählerpolynom < Grad Nennerpolyom)

Aufgabe 16.3

(a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1\}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^5 + 2x - 4}{x^2 - 3x - 10} = \dfrac{x^5 + 2x - 4}{(x-5)(x+2)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$

Aufgabe 16.4

```
 (x^3 + 2x^2 - 3x + 4) : (x-1) = x^2 + 3x + 4/(x-1)
-(x^2 -  x^2)
 ------------
        3x^2 - 3x
      -(3x^2 - 3x)
       -----------
                /  + 4 (Rest)
```

Aufgabe 16.5

Aufgabe 16.6

```
 (x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1) : (x+1) =  x^4-x^3+x^2-x+1-2/(x+1)
-(x^4 +  x^4)
 ------------
        -x^4 + 0x^3
      -(-x^4 -  x^3)
       -------------
                x^3 + 0x^2
              -(x^3 +  x^2)
               -------------
                      -x^2 + 0x
                    -(-x^2 -  x)
                     -----------
                             x - 1
                           -(x + 1)
                            -------
                                -2 (Rest)
```

Aufgabe 16.7

$f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
- *Nullstellen:* $N = \{3\}$
- *hebbare Definitionslücken:* keine
- *Polstelle:* $x = -5$ (mVzw)

Aufgabe 16.8

$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- *Nullstellen:* $N = \{\,\}$
- *hebbare Definitionslücke:* $x = -1$
- *Polstelle:* $x = 1$ (mVzw)

Aufgabe 16.9

$f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2+1}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$
- *Nullstellen:* $N = \{\frac{3}{5}\}$
- *hebbare Definitionslücken:* keine
- *Polstellen:* keine

Aufgabe 16.10

$f(x) = 1 + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1+x}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x+1}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- *Nullstellen:* $N = \{-\frac{1}{2}\}$
- *hebbare Definitionslücken:* keine
- *Polstelle:* $x = -1$ (mVzw)

Aufgabe 16.11

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$
- *Nullstellen:* $N = \{\,\}$
- *hebbare Definitionslücken:* $x = 2$
- *Polstellen:* $x = 3$ (mVzw)

Aufgabe 16.12

(a) horizontale Asymptote: $y = 1$

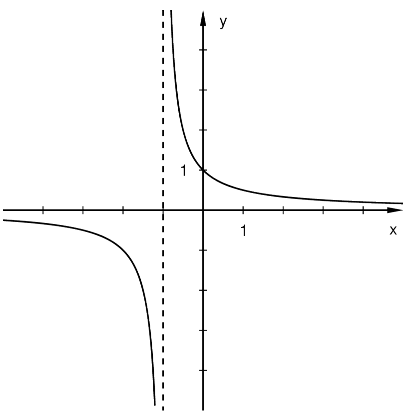
(b) $(x^2 + 2x + 3) : (x + 2) = \cdots = x + \dfrac{3}{x+2} \quad \Rightarrow \quad a(x) = x$

Aufgabe 16.13

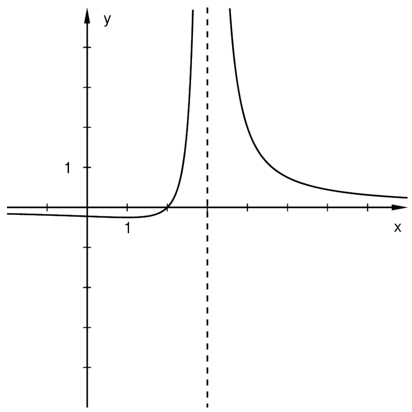
(a) $f(0) = \dfrac{1}{-1} = -1$

(b) $f(0) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

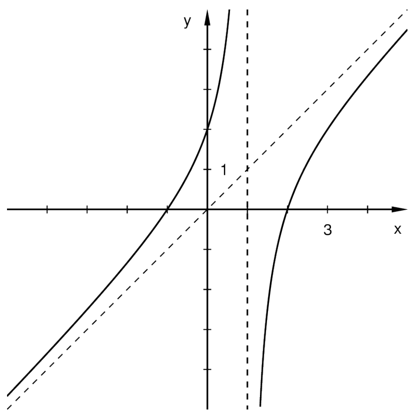
Aufgabe 16.14



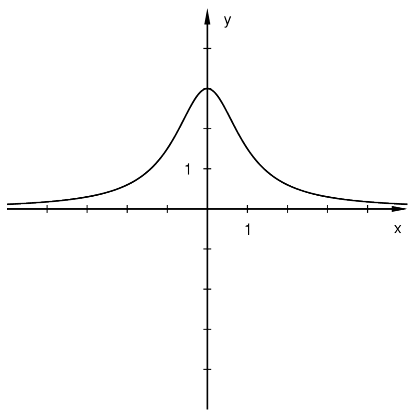
Aufgabe 16.15



Aufgabe 16.16



Aufgabe 16.17



Aufgabe 16.18

$$f\colon y = \frac{x+2}{x-3}$$

Aufgabe 16.19

$$f\colon y = \frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 16.20

$f\colon y = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$

Aufgabe 16.21

$f(x) = \dfrac{8}{4-x^2} = \dfrac{8}{(2-x)(2+x)}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

- *Symmetrie:* Zähler- und Nennerpolynom sind beide gerade Funktionen. Also ist $f(x)$ eine gerade Funktion und der Graph ordinatensymmetrisch, d. h. symmetrisch zur y-Achse.

- *Nullstellen:* $N = \{\,\}$ (keine)

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{8}{4-0} = 2$

- *Verhalten bei den Defintionslücken:*

  $x = -2$: $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$; Pol mit Vzw

  $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$; Pol mit Vzw

  Beachte die Symmetrie der Vorzeichen: $-/+/+/-$ (von links nach rechts)

  (keine hebbaren Definitionslücken)

- *Verhalten für grosse $|x|$:*

  Da der Grad des Zählerpolynoms (0) kleiner als der Grad des Nennerpolynoms (2) ist, muss keine Polynomdivision durchgeführt werden, weil $f(x)$ gegen Null konvergiert, wenn $|x|$ gegen ∞ strebt.

  für grosse $|x|$ gilt: $f(x) \approx 0$ ($y = 0$ ist horizontale Asymptote)

- *Ableitungen:*

  $$f'(x) = \frac{0 \cdot (4-x^2) - 8 \cdot (-2x)}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{16x}{\left(4-x^2\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{16 \cdot \left(4-x^2\right)^2 - 16x \cdot 2 \cdot \left(4-x^2\right) \cdot (-2x)}{\left(4-x^2\right)^4}$$

$$= \frac{16 \cdot \left(4-x^2\right)^2 + 64x^2 \cdot \left(4-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^4} \quad \text{[mit } (4-x^2) \text{ kürzen]}$$

$$= \frac{16 \cdot \left(4-x^2\right) + 64x^2}{\left(4-x^2\right)^3}$$

$$= \frac{64+48x^2}{\left(4-x^2\right)^3}$$

Beachte: Der Nenner $\left(4-x^2\right)^2$ wird sinnvollerweise mit der Kettenregel abgeleitet: die Ableitung der äusseren Funktion $(4-x^2)^2$ wird bei unveränderter innerer Funktion [also $2 \cdot (4-x^2)$] mit der Ableitung der inneren Funktion [also $-2x$] multipliziert.

- *Extrempunkte:*

  Kandidaten: $f'(x) = \dfrac{16x}{(4-x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

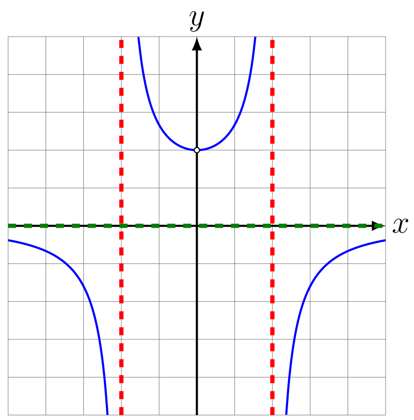
  Bemerkung: In Frage kommen nur Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, da die Division durch Null verboten ist.

  Test: $f''(0) = \dfrac{64+0}{(4-0)^3} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ TiP(0, 2) [$\rightarrow$ Ordinatenabschnitt]

- *Wendepunkte:*

  Kandidaten: $f''(x) = \dfrac{64+48x^2}{\left(4-x^2\right)^3} = 0$ (keine Nullstellen im Zähler)

- *Graph:* (Abstand Gitternetzlinien: 1 Einheit)



Aufgabe 16.22

$$f(x) = \frac{4+x^2}{x^2-9} = \frac{(2-x)(2+x)}{(x-3)(x+3)}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

- *Symmetrie:* Zähler- und Nennerpolynom sind beide gerade Funktionen. Also ist $f(x)$ eine gerade Funktion und der Graph ordinatensymmetrisch, d. h. symmetrisch zur y-Achse.

- *Nullstellen:* $N = \{\,\}$ (keine)

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{4}{-9} \approx -0.44$

- *Verhalten bei den Defintionslücken:*

  $x = -3$: $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$; Pol mit Vzw

  $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$; Pol mit Vzw

  Beachte die Symmetrie der Vorzeichen: $+/-/-/+$ (von links nach rechts)

  (keine hebbaren Definitionslücken)

- *Verhalten für grosse $|x|$:*

  Da der Grad des Zählerpolynoms (2) gleich gross wie der Grad des Nennerpolynoms (2) ist, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden. Beachte, dass die Terme vor der Division nach absteigenden Potenzen von x sortiert werden müssen, da sonst die Polynomdivision nicht funktioniert.

  $$(x^2 + 4) : (x^2 - 9) = 1 + \frac{13}{x^2 - 9} \quad \text{(ohne ausführliche Berechnung)}$$

  für grosse $|x|$ gilt: $f(x) \approx 1$ ($y = 1$ ist horizontale Asymptote)

- *Ableitungen:*

  $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2 - 9) - (4 + x^2) \cdot 2x}{\left(x^2 - 9\right)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 18x - 8x - 2x^3}{\left(x^2 - 9\right)^2} = \frac{-26x}{\left(x^2 - 9\right)^2} \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-26 \cdot \left(x^2 - 9\right)^2 + 26x \cdot 2 \cdot \left(x^2 - 9\right) \cdot 2x}{\left(x^2 - 9\right)^4} \\ &= \frac{-26 \cdot \left(x^2 - 9\right)^2 + 104x^2 \cdot \left(x^2 - 9\right)}{\left(x^2 - 9\right)^4} \quad [\text{mit } (x^2 - 9) \text{ kürzen}] \\ &= \frac{-26 \cdot \left(x^2 - 9\right) + 104x^2}{\left(x^2 - 9\right)^3} \\ &= \frac{78x^2 + 234}{\left(x^2 - 9\right)^3} \end{aligned}$$

Beachte: Der Nenner $\left(x^2-9\right)^2$ wird sinnvollerweise mit der Kettenregel abgeleitet: die Ableitung der äusseren Funktion $(x^2-9)^2$ wird bei unveränderter innerer Funktion [also $2\cdot(x^2-9)$] mit der Ableitung der inneren Funktion [also $2x$] multipliziert.

- *Extrempunkte:*

  Kandidaten: $f'(x) = \dfrac{-26x}{(x^2-9)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

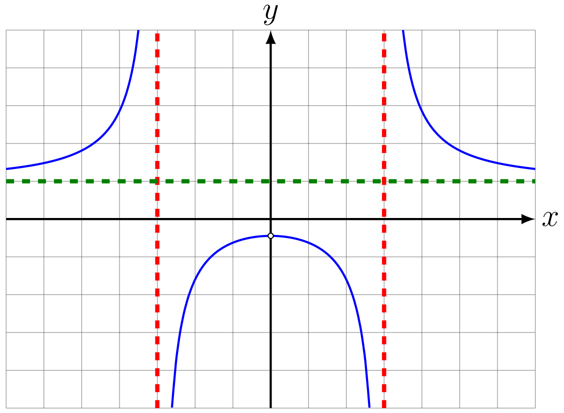
  Bemerkung: In Frage kommen nur Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, da die Division durch Null verboten ist.

  Test: $f''(0) = \dfrac{0+234}{(0-9)^3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}\left(0, -\frac{4}{9}\right)$ [$\rightarrow$ Ordinatenabschnitt]

- *Wendepunkte:*

  Kandidaten: $f''(x) = \dfrac{48x^2+234}{\left(x^2-9\right)^3} = 0$ (keine Nullstellen im Zähler)

- *Graph:* (Abstand Gitternetzlinien: 1 Einheit)



Aufgabe 16.23

$f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- *Symmetrie:* Da das Nennpolynom aus Termen mit ungeraden und geraden Exponenten der Variablen x besteht, liegt keine uns bekannte Symmetrie vor.

- *Nullstellen:* $N = \{0\}$

  Bemerkung: Wegen $x^2 = 0$ ist $x = 0$ eine „doppelte“ Nulltelle, was meist auf eine Extremstelle hinweist.

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{0}{-1} = 0$

- *Verhalten bei den Defintionslücken:*

  $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$; Pol mit Vzw

  (keine hebbaren Definitionslücken)

- *Verhalten für grosse $|x|$:*

  Da der Grad des Zählerpolynoms (2) grösser als der Grad des Nennerpolynoms (1) ist, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

  $$(x^2 + 0x + 0) : (x - 1) = x + 1 + \frac{1}{x - 1} \quad \text{(ohne ausführliche Berechnung)}$$

  für grosse $|x|$ gilt also: $f(x) \approx x + 1$ ($y = x + 1$ ist schiefe Asymptote)

- *Ableitungen:*

  $$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

  $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} \quad \text{[mit } (x-1) \text{ kürzen]} \\ &= \frac{(2x-2) \cdot (x-1) - (x^2 - 2x) \cdot 2}{(x-1)^3} \quad \text{[ausmultiplizieren, vereinfachen]} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

  Beachte: Der Nenner $(x-1)^2$ wird sinnvollerweise mit der Kettenregel abgeleitet: die Ableitung der äusseren Funktion $(x-1)^2$ wird bei unveränderter innerer Funktion [also $2 \cdot (x-1)$] mit der Ableitung der inneren Funktion [hier eine harmlose 1] multipliziert.

- *Extrempunkte:*

  Kandidaten: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2$

  Bemerkung: In Frage kommen nur Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, da die Division durch Null verboten ist.

  Test:

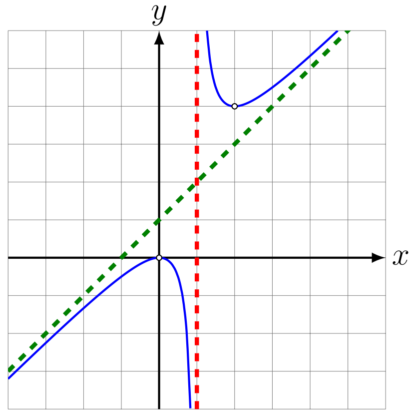
  $f''(0) = \dfrac{2}{(0-1)^3} = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}\big(0, 0\big)$ [$\to$ Ordinatenabschnitt]

  $f''(2) = \dfrac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}\big(2, 4\big)$

- *Wendepunkte:*

  Kandidaten: $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} = 0$ (keine Nullstellen im Zähler)

- *Graph:* (Abstand Gitternetzlinien: 1 Einheit)



Aufgabe 16.24

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+6}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

- *Symmetrie:* Das Zählerpolynom ist eine ungerade Funktion und das Nennerpolynom eine gerade. Deshalb ist die Funktion f ungerade und der Graph ist ursprungssymmetrisch.

- *Nullstellen:* $N = \{0\}$

  Bemerkung: Wegen $x^3 = 0$ ist $x = 0$ eine „dreifache" Nulltelle, was oft auf eine Wendestelle hinweist (siehe weiter unten).

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{0}{0+6} = 0$

- *Verhalten bei den Defintionslücken:*

  (Mangels Definitionslücken gibt es hier nichts zu tun.)

- *Verhalten für grosse $|x|$:*

  Da der Grad des Zählerpolynoms (3) grösser als der Grad des Nennerpolynoms (2) ist, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

  $$(x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0) : (x^2 + 6) = x - \frac{6x}{x^2+6} \quad \text{(ohne ausführliche Berechnung)}$$

  für grosse $|x|$ gilt also: $f(x) \approx x$ ($y = x$ ist schiefe Asymptote)

- *Ableitungen:*

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2+6) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2+6\right)^2} = \frac{3x^4 + 18x^2 - 2x^4}{\left(x^2+6\right)^2} = \frac{x^4 + 18x^2}{\left(x^2+6\right)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3+36x) \cdot \left(x^2+6\right)^2 - (x^4+18x^2) \cdot 2 \cdot \left(x^2+6\right) \cdot 2x}{\left(x^2+6\right)^4} \\ &= \frac{(4x^3+36x) \cdot \left(x^2+6\right) - (x^4+18x^2) \cdot 2 \cdot 2x}{\left(x^2+6\right)^3} \\ &= \frac{4x^5 + 24x^3 + 36x^3 + 216x - 4x^5 - 72x^3}{\left(x^2+6\right)^3} \\ &= \frac{216x - 12x^3}{\left(x^2+6\right)^3} \end{aligned}$$

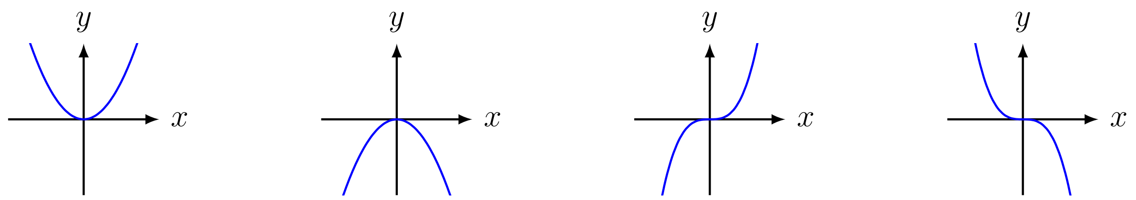
Beachte: Der Nenner $\left(x^2+6\right)^2$ wird sinnvollerweise mit der Kettenregel abgeleitet: die Ableitung der äusseren Funktion $\left(x^2+6\right)^2$ wird bei unveränderter innerer Funktion [also $2 \cdot \left(x^2+6\right)$] mit der Ableitung der inneren Funktion [hier $2x$] multipliziert.

- *Extrempunkte:*

Kandidaten: $f'(x) = \dfrac{x^4+18x^2}{\left(x^2+6\right)^2} = \dfrac{x^2(x^2+18)}{\left(x^2+6\right)^2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

Bemerkung: In Frage kommen nur Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, da die Division durch Null verboten ist.

Test: Wegen der Ursprungssymmetrie, kann es im Punkt $(0,0)$ höchstens einen Wendepunkt und keinen Extrempunkt geben.



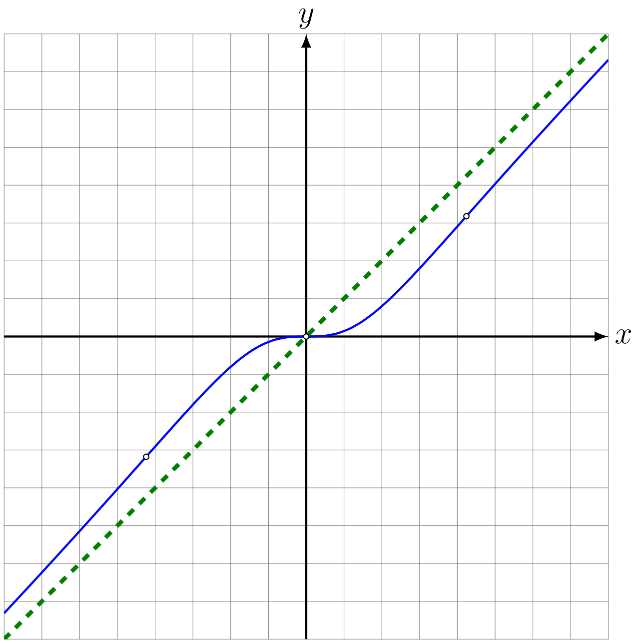
- *Wendepunkte:*

Kandidaten: $f''(x) = \dfrac{216x - 12x^3}{\left(x^2+6\right)^3} = \dfrac{12x(18-x^2)}{\left(x^2+6\right)^3}$

$x_1 = -\sqrt{18} \approx -4.24$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{18} \approx 4.24$ (Symmetrie!)

$\mathrm{WeP}(-4.24, -3.18)$, $\mathrm{TeP}(0,0)$, $\mathrm{WeP}(4.24, 3.18)$

- *Graph:* (Abstand Gitternetzlinien: 1 Einheit)



y
x

Aufgabe 17.1

$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

(b) *Symmetrie:*

$f(-x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = f(x) \Rightarrow$ ordinatensymmetrisch

(c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (x-Achse ist Asymptote)

(d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*

$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen

$f(0) = 2\mathrm{e}^0 = 2$

(e) *Ableitungen:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\\
f'(x) &= 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = -2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\\
f''(x) &= -2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + (-2x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = (2x^2-2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\\
f'''(x) &= 4x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + (2x^2-2) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = (6x-2x^3)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

(f) *Extremstellen:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0\\
-2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} &= 0\\
x &= 0
\end{aligned}$$

Test: $f''(0) = (-2)\mathrm{e}^0 = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ist Hochstelle

y-Koordinate: $f(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad$ HoP$(0|2)$

(g) *Wendepunkte:*

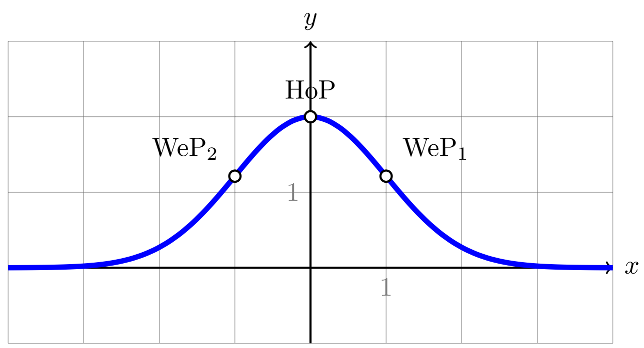
Kandidaten:
$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0\\
(2x^2-2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} &= 0\\
2(x^2-1) &= 0\\
x_1 &= 1\\
x_2 &= -1
\end{aligned}$$

Test: $f'''(1) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ ist Wendestelle

y-Koordinate: $f(1) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad$ WeP$_1(1|1.21)$

Symmetrie $\quad \Rightarrow \quad$ WeP$_2(-1|1.21)$

(h) *Graph:*


y
HoP
WeP2
WeP1
1
1
x

Aufgabe 17.2

$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

(b) *Symmetrie:*

$f(-x) = (-x-1)\mathrm{e}^{x} \neq f(x)$

$-f(-x) = (x+1)\mathrm{e}^{x} \neq f(x)$

$\Rightarrow$ weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

(c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (x-Achse ist Asymptote)

(d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*

$(x-1)\mathrm{e}^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(0) = \mathrm{e}$

(e) *Ableitungen:*

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\mathrm{e}^{-x} \\ f'(x) &= 1\cdot\mathrm{e}^{-x} + (x-1)\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot(-1) = (2-x)\mathrm{e}^{-x} \\ f''(x) &= (-1)\cdot\mathrm{e}^{-x} + (2-x)\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot(-1) = (x-3)\mathrm{e}^{-x} \\ f'''(x) &= 1\cdot\mathrm{e}^{-x} + (x-3)\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot(-1) = (4-x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

(f) *Extrempunkte:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (2-x)\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Test: $f''(2) = (2-3)\mathrm{e}^{-2} = -1/\mathrm{e}^2 < 0 \quad\Rightarrow\quad x = 2$ ist Hochstelle

y-Koordinate: $f(2) = (2-1)\mathrm{e}^{-2} = \quad\Rightarrow\quad$ HoP$(2|0.135)$

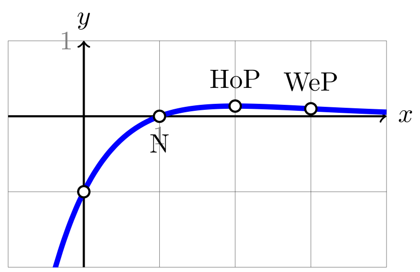
(g) *Wendepunkte:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (x-3)\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Test: $f'''(3) = (4-3)\mathrm{e}^{-2} = 1/\mathrm{e}^2 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x = 3$ ist Wendestelle

y-Koordinate: $f(3) = (3-1)\cdot\mathrm{e}^{-3} = 0.0996 \quad\Rightarrow\quad$ WeP$(3|0.0996)$

(h) *Graph:*



Aufgabe 17.3

$f(x) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x$

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

(b) *Symmetrie:*

$f(-x) = (x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x} \neq f(x)$ (für alle x)

$-f(-x) = -(x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x} \neq f(x)$ (für alle x)

$\Rightarrow$ weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

(c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ (x-Achse ist Asymptote)

(d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*

$(x^2 - 2x + 2) \cdot \mathrm{e}^x = 0 \quad \Rightarrow \quad$ keine Nullstellen (negative Diskriminante)

$f(0) = 2$

(e) *Ableitungen:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x \\
f'(x) &= (2x - 2) \cdot \mathrm{e}^x + (x^2 - 2x + 2) \cdot \mathrm{e}^x = x^2 \cdot \mathrm{e}^x \\
f''(x) &= 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^x = (x^2 + 2x) \cdot \mathrm{e}^x \\
f'''(x) &= (2x + 2) \cdot \mathrm{e}^x + (x^2 + 2x) \cdot \mathrm{e}^x = (x^2 + 4x + 2) \cdot \mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

(f) *Extremstellen:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
x^2 \cdot \mathrm{e}^x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Test: $f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ unklar

(g) *Wendepunkte:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
(x^2 + 2x) \cdot \mathrm{e}^x &= 0 \\
x(x + 2) \cdot \mathrm{e}^x &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= -2
\end{aligned}$$

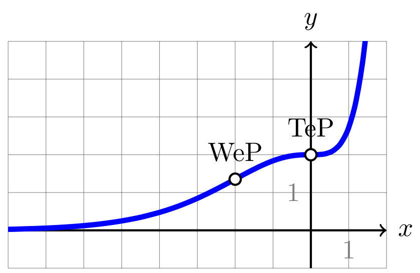
Test: $f'''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ist Wendestelle

$f'''(-2) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$ ist Wendestelle

y-Koordinaten: $f(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TeP}(0, 2)$

$f(-2) = 10\mathrm{e}^{-2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}(-2, 3.68)$

(h) *Graph:*


y
TeP
WeP
1
x
1

Aufgabe 17.4

$f(x) = x \cdot \ln x$

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} = (0, \infty)$

(b) *Symmetrie:*

$f(-x) = (-x)\ \ln(-x) \neq f(x)$ für alle x

$-f(-x) = x\ \ln(-x) \neq f(x)$ für alle x

$\Rightarrow$ weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

(c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

(d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*

$x \cdot \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$f(0)$ ist nicht definiert

(e) *Ableitungen:*

$$f(x) = x\ \ln x$$
$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$
$$f''(x) = \frac{1}{x}$$
$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

(f) *Extremstellen:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1 \\ x &= \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

Test: $f''(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{e}^1$ ist Tiefstelle

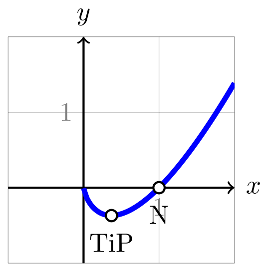
y-Koordinate: $f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}\ \ln \mathrm{e}^{-1} = -\mathrm{e}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(0.37| - 0.37)$

(g) *Wendepunkte:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{1}{x} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ keine Wendepunkte

(h) *Graph:*



y
1
x
N
TiP

Aufgabe 17.5

$f(x) = 5\,\dfrac{\ln x}{x}$

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} = (0, \infty)$

(b) *Symmetrie:*

weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

(c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$; Asymptoten: x- und y-Achse

(d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*

$\dfrac{5\;\ln x}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$f(0)$ ist nicht definiert

(e) *Ableitungen:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{5\;\ln x}{x} = 0\\
f'(x) &= \frac{5/x \cdot x - 5\;\ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{5 - 5\ln x}{x^2}\\
f''(x) &= \frac{(-5/x)\cdot x^2 - (5 - 5\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-15x + 10x\ln x}{x^4} = \frac{10\ln x - 15}{x^3}\\
f'''(x) &= \frac{(10/x)\cdot x^3 - (10\ln x - 15)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{55 - 30\log x}{x^4}
\end{aligned}$$

(f) *Extremstellen:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0\\
5 - 5\ln x &= 0\\
x &= \mathrm{e}
\end{aligned}$$

Test: $f''(\mathrm{e}) = -15 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{e}$ ist Hochstelle

y-Koordinate: $f(\mathrm{e}) = 5/\mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad$ HoP(2.72|1.84)

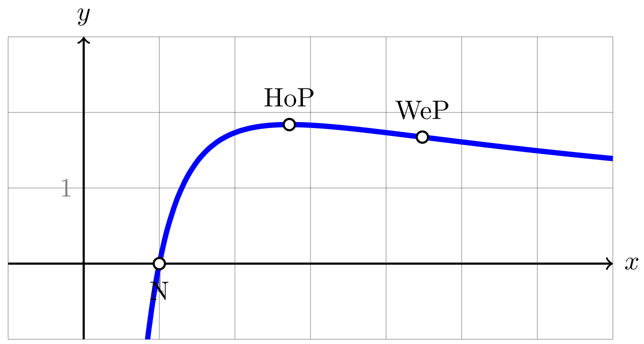
(g) *Wendepunkte:*

Kandidaten:
$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0\\
10\ln x - 15 &= 0\\
\ln x &= 1.5\\
x &= \mathrm{e}^{1.5}
\end{aligned}$$

Test: $f''(\mathrm{e}^{1.5}) = -15 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{e}^{1.5}$ ist Wendestelle

y-Koordinate: $f(\mathrm{e}^{1.5}) \approx 1.67 \quad \Rightarrow \quad$ WeP(4.48|1.67)

(h) *Graph:*


y
HoP
WeP
1
x
N