
Differenzialrechnung

Übungen

Aufgabe 1.1

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 7)$$

Aufgabe 1.2

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin 3x$$

Aufgabe 1.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 4x + 1)$$

Aufgabe 1.4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$$

Aufgabe 1.5

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$$

Aufgabe 1.6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^3}{(x + 2)}$$

Aufgabe 1.7

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

Aufgabe 1.8

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{9x^2 - 4}{3x + 2}$$

Aufgabe 1.9

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$$

Aufgabe 1.10

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2}$$

Aufgabe 1.11

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$$

Aufgabe 1.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 7x + 6}$$

Aufgabe 1.13

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$$

Aufgabe 1.14

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

Aufgabe 1.15

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3}$$

Aufgabe 1.16

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \tan \frac{x}{2}$$

Aufgabe 1.17

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \tan \frac{x}{2}$$

Aufgabe 1.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$$

Aufgabe 1.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$$

Aufgabe 1.20

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Aufgabe 1.21

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$$

Aufgabe 1.22

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$$

Aufgabe 1.23

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Aufgabe 1.24

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$$

Aufgabe 1.25

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

Aufgabe 1.26

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x$$

Aufgabe 1.27

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$$

Aufgabe 1.28

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x}{x}$$

Aufgabe 1.29

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 + 2x + 1}$$

Aufgabe 1.30

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{5x - 9}$$

Aufgabe 1.31

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 2}{2x^2 + 1}$$

Aufgabe 1.32

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^2}$$

Aufgabe 1.33

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1}$$

Aufgabe 1.34

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + x^2}{x^2}$$

Aufgabe 1.35

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x - x^2}{2x^2 + 3}$$

Aufgabe 1.36

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x}$$

Aufgabe 1.37

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$$

Aufgabe 1.38

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

Aufgabe 1.39

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|}$$

Aufgabe 1.40

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8}{2^x}$$

Aufgabe 1.41

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^5}$$

Aufgabe 1.42

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Aufgabe 1.43

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{100}$$

Aufgabe 2.1

Werte die Funktion an der gegebenen Stelle aus und vereinfache den Wert so weit wie möglich.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$; $x = 2 + h$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$; $x = 3 + h$

(c) $f(x) = (x-4)^3$; $x = 6 + h$

Aufgabe 2.2

Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = -3$.

Aufgabe 2.3

Bestimme die Ableitung von $f(x) = 3x - 4$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 2.4

Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 2.5

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$.

Aufgabe 2.6

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x+1}$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 2.7

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 2.8

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$.

Aufgabe 2.9

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{2x}$ an der Stelle $x_0 = 3$.

Aufgabe 2.10

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x+3}$ an der Stelle $x_0 = -2$.

Aufgabe 2.11

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = -2$.

Aufgabe 2.12

Bestimme die Gleichung der Normalen des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x-3}$ an der Stelle $x = 4$.

Aufgabe 2.13

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ an der Stelle $x = 1$.

Aufgabe 2.14

Bestimme die Gleichung der Normalen des Graphen von $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 2.15

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x}$ an der Stelle $x = 2$.

Aufgabe 2.16

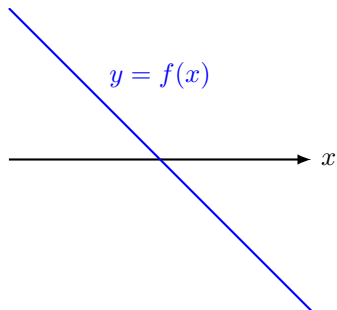
Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x = \pi/4$.

Aufgabe 2.17

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 1$.

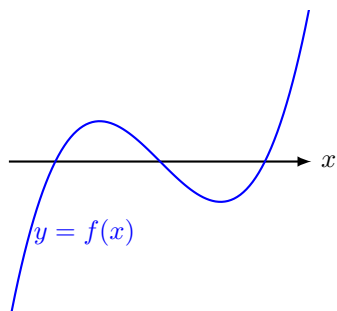
Aufgabe 2.18

Differenziere graphisch:



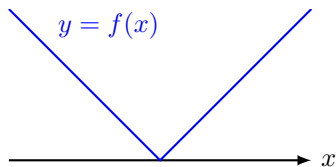
Aufgabe 2.19

Differenziere graphisch:



Aufgabe 2.20

Differenziere graphisch:



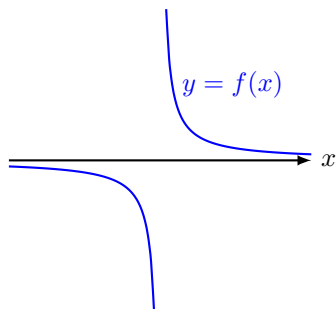
Aufgabe 2.21

Differenziere graphisch:



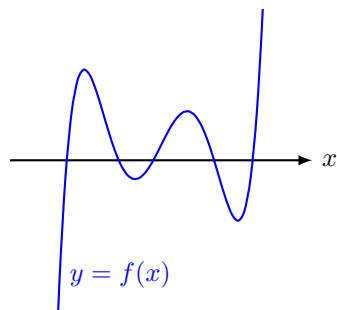
Aufgabe 2.22

Differenziere graphisch:



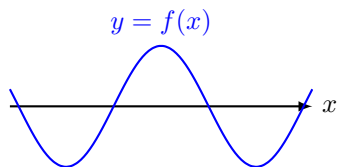
Aufgabe 2.23

Differenziere graphisch:



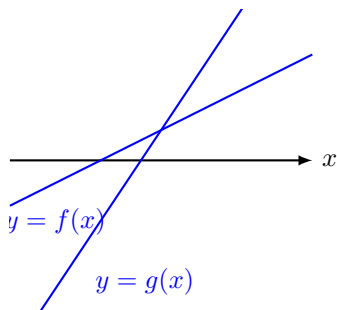
Aufgabe 2.23

Differenziere graphisch:



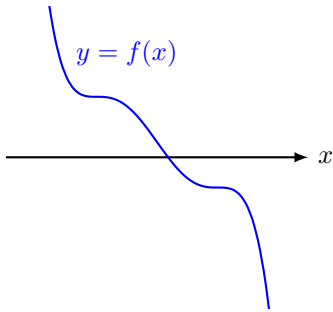
Aufgabe 2.24

Differenziere graphisch:



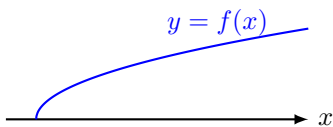
Aufgabe 2.25

Differenziere graphisch:



Aufgabe 2.26

Differenziere graphisch:



Aufgabe 3.1

Beweise: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

Hinweis: Verwende die trigonometrische Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, um den obigen Grenzwert in eine Form zu bringen, in der der bekannte Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

auftritt.

Aufgabe 3.2

Beweise: $[\cos x]' = -\sin x$

Hinweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von $[\sin x]' = \cos x$.

Aufgabe 3.3

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = 5$.

Aufgabe 3.4

Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^5$ an der Stelle $x = -2$.

Aufgabe 3.5

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x = \pi/2$.

Aufgabe 3.6

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 3.7

Bestimme die Gleichung der Normalen an den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 3.8

Die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x = 1$ begrenzt zusammen mit den Koordinatenachsen im II. Quadranten eine Dreiecksfläche. Welchen Inhalt hat diese Fläche?

Aufgabe 3.9

An welchen Stellen hat der Graph der Funktion $f(x) = 1/x$ die Steigung $m = -1.44$?

Aufgabe 3.10

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 ...

- monoton wachsend, wenn $f'(x_0) > 0$,
- monoton fallend, wenn $f'(x_0) < 0$.

Ist f an der Stelle x_0 monoton wachsend oder monoton fallend?

(a) $f(x) = x^4$; $x_0 = -3$

(b) $f(x) = x^7$; $x_0 = -100$

(c) $f(x) = \ln x$; $x_0 = 0.7$

(d) $f(x) = 1/x$; $x_0 = 4$

(e) $f(x) = 1/x$; $x_0 = -4$

Aufgabe 3.11

Bestimme die zweite Ableitung $f''(x)$ der gegebenen Funktion.

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \sin x$

(c) $f(x) = \ln x$

(d) $f(x) = x$

Aufgabe 3.12

An welcher Stelle ist der Graph von $f(x) = x^2$ parallel zur Geraden $g: y = 3x + 5$?

Aufgabe 3.13

Bestimme die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 in Grad.

(a) $f(x) = x^4; \quad x_0 = 0.5$

(b) $f(x) = 1/x; \quad x_0 = -1$

(c) $f(x) = e^x; \quad x_0 = -2$

(d) $f(x) = \ln x; \quad x_0 = \sqrt{3}$

(e) $f(x) = \cos x; \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$

Aufgabe 4.1

$$f(x) = x^2 + x^3; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.2

$$f(x) = \sin x + \cos x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.3

$$f(x) = \tan x + x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.4

$$f(t) = 3 + \ln t; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.5

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.6

$$f(x) = 3^x + x^3; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.7

$$a(z) = 1 + z + z^2 + z^3; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.8

$$f(x) = \log_{10} x + \sqrt{x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.9

$$f(x) = 4 + x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.10

$$f(x) = x^{-4} + x^{-6}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.11

$$f(x) = 3x^2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.12

$$f(x) = 5e^x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.13

$$f(x) = -4 \sin x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.14

$$g(x) = \pi \ln x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.15

$$f(x) = -\cos x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.16

$$f(x) = 7; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.17

$$f(t) = \frac{5}{t}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.18

$$f(x) = 4\sqrt{x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.19

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.20

$$h(s) = 3s^{-5}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.21

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.22

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 9; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.23

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x - 2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.24

$$f(x) = \frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}x - 3; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.25

$$f(x) = \sqrt{2}x^3 - \pi x^2 + e x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.26

$$g(x) = 0.1x^5 - 0.25x^3 - 0.3x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.27

$$f(x) = 2 \cdot (7x^2 + 3x - 8); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.28

$$f(t) = (t - 1)(t + 1); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.29

$$h(x) = (x + 2)^2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.30

$$f(x) = 3(x + 1)(x - 2); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.31

$$f(t) = (3t^2 + t) \cdot (1 - t^2); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.32

$$f(x) = (1 + 3x + x^2) \cdot (x^3 + 4x - 3); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.33

$$g(x) = x \cdot \cos x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.34

$$f(t) = (t^2 - 1) \cdot \sin t; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.35

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.36

$$h(t) = \cos^2 t; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.37

$$f(x) = x \cdot \ln x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.38

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.39

$$h(x) = x^2 \cdot e^x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.40

$$f(x) = \tan x \cdot \cos x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.41

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.42

$$f(x) = \frac{3x}{x+1}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.43

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.44

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-4}{x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.45

$$f(x) = \frac{x^4+3x^2+2}{x+5}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.46

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.47

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.48

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.49

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.50

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{e^x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.51

$$f(x) = (5x - 3)^7; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.52

$$f(x) = e^{3x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.53

$$f(x) = e^{-x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.54

$$f(x) = \tan(4x); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.55

$$f(x) = \sqrt{7x - 3}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.56

$$f(x) = \sin 2x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.57

$$f(x) = \cos(-x); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.58

$$f(x) = \cos(x^2); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.59

$$f(x) = \sin(x^2 + 3x + 1); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.60

$$f(x) = (\sin x)^2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.61

$$f(x) = 5x^2 - 3e^x + \ln x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.62

$$f(x) = \sin(x^2); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.63

$$f(x) = \sin^2 x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.64

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.65

$$f(x) = (x^4 + x) \cdot \ln x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.66

$$f(x) = \sqrt{\ln x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.67

$$f(x) = e^{-x^2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.68

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.69

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.70

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.71

$$f(x) = x^4 \cdot \sin x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.72

$$f(x) = \tan(5x + \pi); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.73

$$f(x) = \frac{2}{x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.74

$$f(x) = e^{(x^2)}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.75

$$f(x) = (e^x)^2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.76

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.77

$$f(x) = (x^3 - 7x^2 + 5)^8; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.78

$$f(x) = x^{-2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.79

$$f(x) = xe^x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.80

$$f(x) = e \cdot x^2 - \frac{1}{e^2 \cdot x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.81

$$f(x) = \frac{x^3}{2e^x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.82

$$f(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.83

$$f(x) = \sin(2x); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.84

$$f(x) = e^{x^2+1} \cdot \ln(x+1); f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.85

$$f(x) = -14 \sin x - 3x^2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.86

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{x}{\pi}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.87

$$f(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.88

$$f(x) = 2^{\sin x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.89

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 - 5}{x^2 + 3x}}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.90

$$f(x) = (x - a) \cdot e^{2-x/a}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 4.91

$$f(x) = x^2 - 2x + 1; f'''(x)$$

Aufgabe 4.92

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - \sqrt{2}x + 1; f'''(x)$$

Aufgabe 4.93

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3; f'''(x)$$

Aufgabe 4.94

$$f(x) = \sin x; f^{(4)}(x)$$

Aufgabe 4.95

$$f(x) = e^{-x}; f^{(4)}(x)$$

Aufgabe 4.96

$$f(x) = x^3; f^{(4)}(x)$$

Aufgabe 5.1

Gegeben ist die stückweise definierte Funktion f .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x + 1 & \text{falls } -5 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \leq x \end{cases}$$

Berechne

(a) $f(0)$ (b) $f(-10)$ (c) $f(4)$ (d) $f(1)$ (e) $f(-5)$

Aufgabe 5.2

Ist die Funktion $f(x) = 4x + 3$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

Aufgabe 5.3

Ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

Aufgabe 5.4

Ist die Funktion $f(x) = 1/(x + 1)$ an der Stelle $x_0 = -1$ stetig?

Aufgabe 5.5

Ist die Funktion $f(x) = |\sin x|$ an der Stelle $x_0 = \pi$ stetig?

Aufgabe 5.6

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 5 & \text{für } x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 3$ stetig?

Aufgabe 5.7

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig?

Aufgabe 5.8

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

Aufgabe 5.9

Ist die Funktion $f(x) = 1/x$ stetig?

Aufgabe 5.10

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x/7 + 1 & \text{für } x < 3 \\ \sqrt{x-1} & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

stetig?

Aufgabe 5.11

Für welchen Wert von a ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 & \text{für } x < 2 \\ x^3 + ax - 4 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 2$ stetig?

Aufgabe 5.12

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

Aufgabe 5.13

Bestimme die Werte der Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f an der Stelle $x = 4$ differenzierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + a & \text{für } x < 4 \\ a\sqrt{x} + b & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$$

Aufgabe 6.1

Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $I = (-\infty, 0]$.

Aufgabe 6.2

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 6.3

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = 1/x$ auf dem Intervall $I = (-\infty, 0)$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 6.4

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $I = \mathbb{R}$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 6.5

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = \sin x$ auf dem Intervall $I = [\pi, 2\pi]$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 6.6

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = -2x$ auf dem angegebenen Intervall $I = \mathbb{R}$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 6.7

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = e^x + e^{-x}$ auf dem angegebenen Intervall $I = \mathbb{R}$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 6.8

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 29$ auf dem Intervall $I = [1, 3]$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 6.9

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = \ln x$ auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 6.10

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 3$$

monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Aufgabe 6.11

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Aufgabe 6.12

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Aufgabe 6.13

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion

$$f(x) = x + \cos x$$

monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Untersuche, ob die Funktion *gerade*, *ungerade* oder *weder gerade noch ungerade* ist.

Aufgabe 7.1

$$f(x) = x^3$$

Aufgabe 7.2

$$f(x) = -x^2$$

Aufgabe 7.3

$$f(x) = 1$$

Aufgabe 7.4

$$f(x) = -7$$

Aufgabe 7.5

$$f(x) = 0$$

Aufgabe 7.6

$$f(x) = 3x^8$$

Aufgabe 7.7

$$f(x) = x^7 \cdot x^5$$

Aufgabe 7.8

$$f(x) = x^6 \cdot x^3$$

Aufgabe 7.9

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

Aufgabe 7.10

$$f(x) = 7x^{-2}$$

Aufgabe 7.11

$$f(x) = (x^{-3})^5$$

Aufgabe 7.12

$$f(x) = \frac{2}{x^7}$$

Aufgabe 7.13

$$f(x) = -x^{-8}$$

Aufgabe 7.14

$$f(x) = x^4 \cdot x^{-4}$$

Aufgabe 7.15

$$f(x) = x - 1$$

Aufgabe 7.16

$$f(x) = 4x^3 + 1$$

Aufgabe 7.17

$$f(x) = 4x^8 + 3x^4 - 2x^2$$

Aufgabe 7.18

$$f(x) = x^9 - \frac{1}{2}x^7$$

Aufgabe 7.19

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Aufgabe 7.20

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

Aufgabe 7.21

$$f(x) = x^4 - x^{-2}$$

Aufgabe 7.22

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x - 3$$

Aufgabe 7.23

$$f(x) = \sin x$$

Aufgabe 7.24

$$f(x) = \cos x$$

Aufgabe 7.25

$$f(x) = \tan x$$

Aufgabe 7.26

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Aufgabe 7.27

$$f(x) = e^x$$

Aufgabe 7.28

$$f(x) = \ln x$$

Aufgabe 7.29

$$f(x) = |x|$$

Aufgabe 7.30

$$f(x) = |x^3| + 1$$

Aufgabe 7.31

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

Aufgabe 7.32

$$f(x) = |x^3| + \sin x$$

Aufgabe 7.33

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

Aufgabe 7.34

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

Aufgabe 7.35

$$f(x) = x|x^3|$$

Aufgabe 7.36

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

Aufgabe 7.37

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$$

Aufgabe 7.38

$$f(x) = \ln |x| + \cos x + x^6$$

Aufgabe 7.39

$$f(x) = e^{(x^2)} - x$$

Aufgabe 7.40

$$f(x) = (x + 1)^2$$

Aufgabe 7.41

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Aufgabe 7.42

$$f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$$

Aufgabe 7.43

$$f(x) = |x^3 + x^2 + x|$$

Aufgabe 7.44

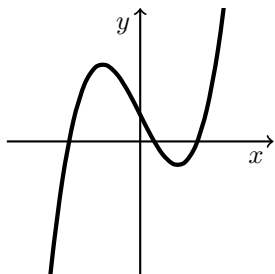
$$f(x) = \frac{x}{x^4 + x^2}$$

Aufgabe 7.45

$$f(x) = (x^2 + 1)^5$$

Aufgabe 8.1

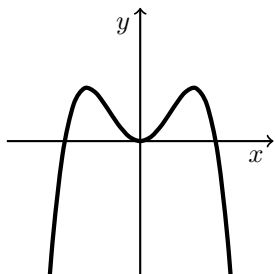
Beurteile aufgrund des asymptotischen Verhaltens, ob der Graph



zur Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$ gehören kann.

Aufgabe 8.2

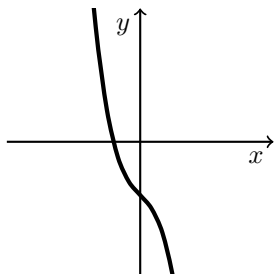
Beurteile aufgrund des asymptotischen Verhaltens, ob der Graph



Zur Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$ gehören kann.

Aufgabe 8.3

Untersuche aufgrund des asymptotischen Verhaltens, ob der Graph



zur Funktion $f(x) = -x^3 - x - 2$ gehören kann.

Aufgabe 8.4

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$.

Aufgabe 8.5

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = x^4 + x^3 + 1$.

Aufgabe 8.6

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = 4x + x^2 - x^6 + x^4$.

Aufgabe 8.7

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = 1 - 5x + 3x^2 - 2x^3$.

Aufgabe 8.8

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = (x-1)(2-x)(3-x)$.

Aufgabe 8.9

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

Aufgabe 8.10

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}$.

Aufgabe 8.11

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$.

Aufgabe 8.12

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 5}{2x - 1}$.

Aufgabe 8.13

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = (x^3 - 3x + 1)e^{-x}$.

Aufgabe 8.14

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$.

Aufgabe 8.15

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2}$.

Aufgabe 8.16

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$.

Aufgabe 9.1

Bestimme die exakten Nullstellen der Funktion f ohne Taschenrechner.

(a) $f(x) = 3 - 7x$

(d) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

(b) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x$

(e) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

(c) $f(x) = x^2 - 3x - 7$

(f) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

Aufgabe 9.2

Bestimme exakt alle reellen Nullstellen von f

(a) $f(x) = -3x(x - 4)(x + 5)(2x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \pi)$

(b) $f(x) = \frac{5(x - 2)^2(x - 1.5)(x + 7)}{x(2x - 3)(x - 2)}$

Aufgabe 9.3

Bestimme exakt alle reellen Nullstellen von f .

(a) $f(x) = \sin(2x)$

(b) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$

(c) $f(x) = \tan(4 - x)$

Aufgabe 9.4

Bestimme exakt alle Nullstellen von $f(x) = \cos x + 1$.

Aufgabe 9.5

Bestimme exakt alle reellen Nullstellen von f .

(a) $f(x) = \ln x - 1$

(b) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 5)$

Aufgabe 9.6

Bestimme alle reellen Nullstellen mit Hilfe des Horner-Schemas.

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ (b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Aufgabe 9.7

Bestimme den Ordinatenabschnitt der Funktion f .

(a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ (d) $f(x) = e^x + 1$
(b) $f(x) = (x - 4)^2$ (e) $f(x) = 2 - \cos(x)$
(c) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 8}{2x^2 + x - 12}$ (f) $f(x) = \ln(x^2 + 5)$

Aufgabe 9.8

Bestimme alle reellen Nullstellen von f mit Hilfe des Taschenrechners.

(a) $f(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 1$
(b) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 4x + 1$
(c) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$
(d) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

Aufgabe 9.9

Bestimme mit dem Bisektionsverfahren die Nullstelle der Funktion f im Intervall I und mit der Genauigkeit ε .

(a) $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}x$; $I = [0, 1]$, $\varepsilon = 10^{-4}$
(b) $f(x) = \sin(x) - x^{-1}$; $I = [1, 2]$, $\varepsilon = 10^{-6}$
(c) $f(x) = x^x - \sqrt{x}$; $I = (0, 1]$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Aufgabe 10.1

Entwickle die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \sin x$ nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 10.2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln x$.

- (a) Entwickle f nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe an der Stelle $x_0 = 1$.
- (b) Berechne mit der Formel aus (a) und deinem Taschenrechner näherungsweise den Wert von $\ln 2$, indem du die Teilsummen für $n = 1, 2, 3, \dots, 200$ bestimmst und die Werte in einer Liste abspeicherst. Wie viele Stellen sind für $n = 200$ korrekt?

Aufgabe 10.3

Entwickle die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe bis zur Potenz x^5 an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 10.4

Berechne die Lösung der Gleichung $x^2 = e^x$ näherungsweise, indem du die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe bis zur Potenz x^3 an der Stelle $x_0 = 0$ entwickelst.

Aufgabe 10.5

Berechne den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion.

Aufgabe 10.6

Schreibe das Polynom $p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ mit Hilfe des Satzes von Taylor um in die Form

$$p(x) = c_4(x-1)^4 + c_3(x-1)^3 + c_2(x-1)^2 + c_1(x-1) + c_0.$$

Aufgabe 11.1

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$$

Aufgabe 11.3

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$$

Aufgabe 11.4

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 20$$

Aufgabe 11.5

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

Aufgabe 11.6

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{2x}$$

Aufgabe 11.7

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

Aufgabe 11.8

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x - 7)^2}$$

Aufgabe 11.9

$$f(x) = x^2 + 8\sqrt{x}$$

Aufgabe 12.1

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph (1 Häuschen = 1 Einheit)

Aufgabe 12.2

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph (1 Häuschen = 1 Einheit)

Aufgabe 12.3

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph (1 Häuschen = 1 Einheit)

Aufgabe 12.4

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x - 4)^2}$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph (1 Häuschen = 1 Einheit)

Aufgabe 12.5

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x + 2)e^{1-x}$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph ($-4 \leq x \leq 8$; $-2 \leq y \leq 10$)

Aufgabe 12.6

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 5)$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph ($-5 \leq x \leq 5$; $-2 \leq y \leq 5$)

Aufgabe 13.1

Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades hat im Punkt $P(2, 1)$ einen Terrassenpunkt und schneidet die x -Achse im Punkt $A(4, 0)$. Bestimme die Gleichung der Funktion.

Aufgabe 13.2

Bestimme die Gleichung des Polynoms dritten Grades mit einer Nullstelle bei $x = -2$. Die Tangente im Wendepunkt $\text{WeP}(0, y)$ hat die Gleichung $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Aufgabe 13.3

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x -Achse im Punkt $P(2, 0)$ und schneidet diese im Punkt $Q(-2, 0)$ unter einem Winkel von 45° . Wie lautet die Funktionsgleichung dieser Funktion?

Aufgabe 13.4

Eine Polynomfunktion dritten Grades hat einen zum Ursprung symmetrischen Graphen und im Punkt $(-2, -4)$ einen Tiefpunkt. Bestimme die Gleichung dieser Funktion.

Aufgabe 13.5

Ein Polynom 3. Grades ist durch $x^2 - x - 6$ teilbar und hat den Wendepunkt $\text{WeP}(1, 6)$. Bestimme die Gleichung des Polynoms.

Aufgabe 13.6

Eine Parabel 3. Ordnung geht durch den Ursprung und hat in $P(-2, 4)$ einen Wendepunkt. Die Wendetangente schneidet die x -Achse in $Q(4, 0)$. Bestimme die Gleichung der Parabel.

Aufgabe 13.7

Eine Parabel 3. Ordnung ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Wendetangente hat die Steigung $-\frac{9}{16}$; die 1. Winkelhalbierende schneidet die Parabel an der Stelle $x = \frac{5}{4}$.

Aufgabe 13.8

Gibt es eine Parabel 3. Ordnung mit dem Ordinatenabschnitt $y = -2$, die in $W(2, 0)$ einen Wendepunkt und an der Stelle $x = 3$ ein Maximum hat? Begründe die Antwort mit den dafür nötigen Rechnungen.

Aufgabe 14.1

Zerlege die Zahl 36 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer Quadrate möglichst klein wird.

Aufgabe 14.2

Welches Rechteck mit dem Umfang 20 cm hat den grössten Flächeninhalt?

Aufgabe 14.3

Informiere dich über die Gründungslegende der antiken Stadt Karthago und über das *isoperimetrische Problem*.

Aufgabe 14.4

Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse $c = 8$ cm erzeugt einen Kegel mit maximalem Volumen, wenn man es um eine seiner Katheten rotieren lässt?

Aufgabe 14.5

Einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ soll ein gleichschenkliges Dreieck mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Wie lang sind die Seiten dieses Dreiecks?

Aufgabe 14.6

Gesucht ist der Punkt $P(u, v)$ auf der Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, so, dass das Dreieck ABP mit $A(-2, 0)$ und $B(u, 0)$ den grösstmöglichen Flächeninhalt hat.

Aufgabe 14.7

Der Punkt $A(u, 0)$ mit $0 < u < \frac{\pi}{2}$ ist die linke untere Ecke eines Rechtecks $ABCD$. Die übrigen Ecken liegen auf der x -Achse und der Sinuskurve. Für welches u erhalten wir den grössten Flächeninhalt von $ABCD$ und wie gross ist er?

Aufgabe 14.8

Einem Zylinder mit Radius $r = 5$ cm und $h = 4$ cm soll der inhaltskleinste Kegel so umschrieben werden, dass die Grundflächen beider Körper in derselben Ebene liegen. Welche Abmessungen muss der Kegel haben?

Aufgabe 14.9

Bestimme den Punkt P auf der Kurve $k: y = x^2 - x + 3$, der vom Punkt $Q(2, 2)$ den kleinsten Abstand besitzt.

Aufgabe 14.10

Der Graph von $f(x) = 1/x$ mit $x > 0$ und die Geraden $y = 2$ sowie $x = 4$ schliessen ein Gebiet ein, in das ein achsenparalleles Rechteck gelegt werden soll.

Welche Abmessungen hat das Rechteck, wenn sein Flächeninhalt maximal werden soll?

Aufgabe 14.11

Für welchen Punkt $P(x, y)$ auf der Kurve mit der Gleichung $y = x^2 - 8x + 21$ mit $D_f = [0, 4]$ hat das achsenparallele Rechteck mit den gegenüberliegenden Ecken $P(x, y)$ und $O(0, 0)$ maximalen Inhalt?

Aufgabe 14.12

Ein gut trainierter Sportler sonnt sich an einem Fluss, als er per Handy einen Hilferuf von seiner Freundin erhält. Diese befindet sich am anderen Ufer 1000 Meter flussabwärts. Er möchte möglichst schnell zu ihr gelangen. Der Fluss ist 500 Meter breit und verläuft in diesem Abschnitt gerade. Auf der anderen Seite des Flusses ist ein Weg. Der Sportler kann auf solch einem Weg 300 Meter in einer Minute zurücklegen. Schwimmend erreicht er eine Geschwindigkeit von 50 m/Min.

Bestimme die minimale Zeit sowie die Länge der zugehörigen Gesamtstrecke, die unser Held auf dem Weg zu seiner Freundin zurücklegt. Vernachlässige die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses.

Quelle: Landesbildungsserver Baden-Württemberg (<http://www.schule-bw.de/>) abgerufen am 29.1.2017

Aufgabe 14.13

Die Idee zu dieser Aufgabe stammt von Prof. Franz Rellich (1906–1955) der damit auf den Vorwurf reagierte, dass seine Analysis-Vorlesung in Göttingen anwendungsfern sei.

Ein Student geht auf der Weender Strasse in Göttingen hinter einem Mädchen mit auffallend schönen Beinen her. Frage: In welcher Entfernung muss er hinter dem Mädchen hergehen, um die Beine, soweit sie unter dem Rock hervorschauen, unter dem grösstmöglichen Blickwinkel zu sehen? Die Höhe des Rocksauumes über dem Erdboden sei dabei 60 cm, die Augenhöhe des Studenten 178 cm.

Aufgabe 15.1

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 + tx^2 + t - 1$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte des Parameters t geht der Graph von f_t durch den Punkt $P(-2, 1)$?

Aufgabe 15.2

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^2 + tx + t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte des Parameters t geht der Graph von f_t durch den Punkt $P(2, 7)$?

Aufgabe 15.3

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 + tx^2 + x - t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Welche Punkte liegen auf allen Graphen der Funktionenschar?

Aufgabe 15.4

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 + tx - 2t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Welche Punkte liegen auf allen Graphen der Funktionenschar?

Aufgabe 15.5

Bestimme allgemein die Nullstellen der Funktionenschar $f_t(x) = x^2 - tx - 2t^2$.

Aufgabe 15.6

Für welche Werte des Parameters t hat die Funktionenschar $f_t(x) = x^2 + 2x + t$ genau zwei Nullstellen?

Aufgabe 15.7

Für welche Werte des Parameters t hat die Funktionenschar $f_t(x) = x^2 + tx + 1$ genau eine Nullstelle?

Aufgabe 15.8

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = tx^3 - x^2 + t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Für welchen Wert von t hat die Tangente von f_t an der Stelle $x = 2$ die Steigung 4?

Aufgabe 15.9

Bestimme die Extrempunkte der Funktionenschar $f_t(x) = tx^3 - 3tx$ mit $t > 0$.

Aufgabe 15.10

Zeige, dass $x = 0$ und $x = t$ Nullstellen der Parabelschar $f_t(x) = t^2x - tx^2$ (mit $t > 0$) sind und berechne den Inhalt der Fläche, die von f_t und der x -Achse eingeschlossen wird (in Abhängigkeit von t).

Aufgabe 15.11

Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = x^2 - ax$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Führe eine Kurvendiskussion der Kurvenschar durch und gib die Nullstellen und Extrempunkte von f_a in Abhängigkeit des Parameters a an.

Aufgabe 15.12

Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = x^3 - 3ax^2$ mit $a > 0$.

Führe eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte).

Aufgabe 15.13

Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = ax^2 - x^3$ mit $a > 0$. Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte?

Aufgabe 15.14

Gegeben ist die Kurvenschar $f_t(x) = tx - x^2$ mit $t > 0$. Für welches t liegt der Hochpunkt des Graphen auf der 1. Winkelhalbierenden?

Aufgabe 16.1

Beschreibe die Art der gebrochenrationalen Funktion mit dem richtigen Fachausdruck.

$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{7x^3 + 2x - 1} \qquad (b) f(x) = \frac{x + 3}{x - 4}$$

Aufgabe 16.2

Beschreibe die Art der gebrochenrationalen Funktion mit dem richtigen Fachausdruck.

$$(a) f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 9}{11} \qquad (b) f(x) = \frac{(x + 1)^5}{(x^3 - 1)^2}$$

Aufgabe 16.3

Bestimme den Definitionsbereich der gebrochenrationalen Funktion f .

$$(a) f(x) = \frac{(x - 1)(x + 5)}{x(x - 1)(x + 3)} \qquad (b) f(x) = \frac{x^5 + 2x - 4}{x^2 - 3x - 10}$$

Aufgabe 16.4

Stelle die unecht gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$$

mit Hilfe einer Polynomdivision als Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion dar.

Aufgabe 16.5

Stelle die unecht gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 1}{x^2 + x + 1}$$

mit Hilfe einer Polynomdivision als Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion dar.

Aufgabe 16.6

Stelle die unecht gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x + 1}$$

mit Hilfe einer Polynomdivision als Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion dar.

Aufgabe 16.7

Bestimme Definitionsmenge D , Nullstellenmenge N , allfällige hebbare Definitionslücken und allfällige Polstellen (Vorzeichenwechsel?).

$$f(x) = \frac{x - 3}{x + 5}$$

Aufgabe 16.8

Bestimme Definitionsmenge D , Nullstellenmenge N , allfällige hebbare Definitionslücken und allfällige Polstellen (Vorzeichenwechsel?).

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

Aufgabe 16.9

Bestimme Definitionsmenge D , Nullstellenmenge N , allfällige hebbare Definitionslücken und allfällige Polstellen (Vorzeichenwechsel?).

$$f(x) = \frac{5x - 3}{x^2 + 1}$$

Aufgabe 16.10

Bestimme Definitionsmenge D , Nullstellenmenge N , allfällige hebbare Definitionslücken und allfällige Polstellen (Vorzeichenwechsel?).

$$f(x) = 1 + \frac{x}{x + 1}$$

Aufgabe 16.11

Bestimme Definitionsmenge D , Nullstellenmenge N , allfällige hebbare Definitionslücken und allfällige Polstellen (Vorzeichenwechsel?).

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$$

Aufgabe 16.12

Bestimme die Gleichung einer ganzrationalen asymptotische Näherungsfunktion.

$$(a) f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+2}$$

Aufgabe 16.13

Bestimme den Ordinatenabschnitt der gebrochenrationalen Funktion.

$$(a) f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 6x + 2}{x^2 - 2x + 4}$$

Aufgabe 16.14

Skizziere den Graphen von $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ohne Taschenrechner.

Aufgabe 16.15

Skizziere den Graphen von $f(x) = \frac{x+2}{(x-3)^2}$ ohne Taschenrechner.

Aufgabe 16.16

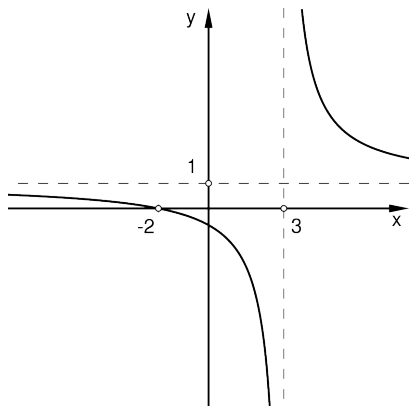
Skizziere den Graphen von $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-1}$ ohne Taschenrechner.

Aufgabe 16.17

Skizziere den Graphen von $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$ ohne Taschenrechner.

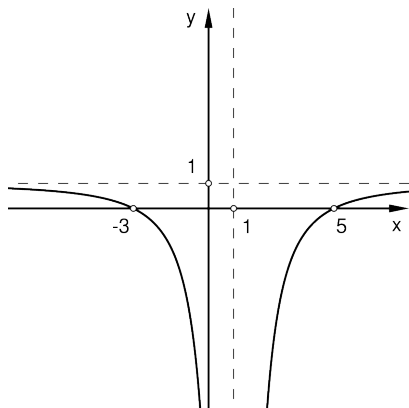
Aufgabe 16.18

Bestimme die Gleichung der Funktion f aus ihrem Graphen.



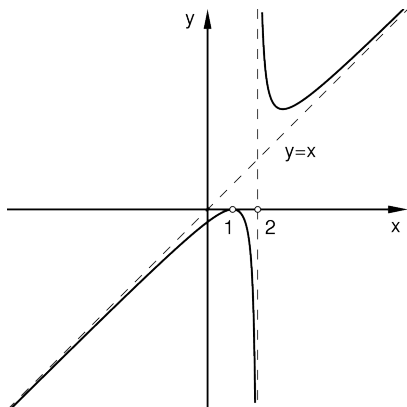
Aufgabe 16.19

Bestimme die Gleichung der Funktion f aus ihrem Graphen.



Aufgabe 16.20

Bestimme die Gleichung der Funktion f aus ihrem Graphen.



Aufgabe 16.21

Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{8}{4 - x^2}$.

Aufgabe 16.22

Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{4 + x^2}{x^2 - 9}$.

Aufgabe 16.23

Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$.

Aufgabe 16.24

Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 6}$.

Aufgabe 17.1

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Aufgabe 17.2

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x - 1)e^{-x}$.

Aufgabe 17.3

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

Aufgabe 17.4

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x \ln x$.

Aufgabe 17.5

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 5\frac{\ln x}{x}$.