

Aufgabe 8.1

- | | |
|---|--|
| (a) $\infty + \infty = \infty$ | (e) $\infty - \infty$ nicht def. |
| (b) $\frac{-\infty}{\infty}$ nicht def. | (f) $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ |
| (c) $\infty - 10^9 = \infty$ | (g) $0 \cdot \infty$ nicht def. |
| (d) $-2 \cdot \infty = -\infty$ | (h) $-\infty - \infty = -\infty$ |

Beachte, dass ∞ und $-\infty$ keine Zahlen sondern Symbole sind, für die sich in einigen Fällen Regeln aus dem Rechnen mit (uneigentlichen) Grenzwerten definieren lassen.

Beispielsweise lässt sich (g) nicht sinnvoll definieren, denn

$$0 \cdot \infty = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

aber

$$0 \cdot \infty = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Bei (b) und (e) lassen sich ähnliche Mehrdeutigkeiten konstruieren.

Aufgabe 8.2

$$5x^3 - 2x^2 + 8x - 1 = x^3 \left(5 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$$

Aufgabe 8.3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 4x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-4x^3) = -\infty$$

Aufgabe 8.4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4) = -\infty \end{aligned}$$

Aufgabe 8.5

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 1}$$

Da die Zählerfunktion einen kleineren Grad als die Nennerfunktion hat, ist g die Nullfunktion:

$$g(x) = 0 \text{ (horizontale Asymptote).}$$

Aufgabe 8.6

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 - 9}$$

Da die Zählerfunktion den gleichen Grad wie die Nennerfunktion hat, ist g der Quotient der Leitkoeffizienten:

$$g(x) = \frac{2}{1} = 2 \text{ (horizontale Asymptote)}$$

Aufgabe 8.7

Da die Zählerfunktion einen grösseren Grad als die Nennerfunktion hat, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

$$\begin{array}{r} (6x^3 - 11x^2 + 7x - 5) : (2x - 3) = 3x^2 - x + 2 + \frac{1}{2x - 3} \\ \underline{-(6x^3 - 9x^2)} \\ -2x^2 + 7x \\ \underline{-(-2x^2 + 3x)} \\ 4x - 5 \\ \underline{-(4x - 6)} \\ 1 \end{array}$$

$$g(x) = 3x^2 - x + 2 \text{ (parabelförmige Asymptote)}$$

Aufgabe 8.8

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

Aufgabe 8.9

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1)e^x = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 1)e^x = \infty$$

Aufgabe 8.10

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2) = \infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2) = \infty$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) = -\infty$$

Aufgabe 8.11

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Aufgabe 8.12

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(2x)$ ist nicht definiert

Aufgabe 8.13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{2}{x}\right) = \cos(0) = 1$$

Aufgabe 8.14

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2} = 0$$

Aufgabe 8.15

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan(x)$ ist nicht definiert

$$(b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \infty$$