Aufgabe 8.1

$\infty + \infty = \infty$

Aufgabe 8.2

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{ ... ist nicht definiert}$$

Begründung: Es lassen sich Funktionen finden, mit denen widersprüchliche Resultate erzeugt werden können. Zum Beispiel:

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} x^2}{\lim\limits_{x\to\infty} x} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} x}{\lim\limits_{x\to\infty} x^2} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

($*$: wegen der Stetigkeit von x^2 und x)

Aufgabe 8.3

$$(-\infty)^3 = \underbrace{(-\infty)\cdot(-\infty)}_{+\infty} \cdot (-\infty) = -\infty$$

Aufgabe 8.4

$$\infty - \infty = \text{ ... ist nicht definiert}$$

Begründung: Es lassen sich Funktionen finden, mit denen widersprüchliche Resultate erzeugt werden können. Zum Beispiel:

$$\infty - \infty = \lim_{x\to\infty} 2x - \lim_{x\to\infty} x \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty} (2x - x) = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

$$\infty - \infty = \lim_{x\to\infty} x - \lim_{x\to\infty} 2x \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty} (x - 2x) = \lim_{x\to\infty} (-x) = -\infty$$

($*$: wegen der Stetigkeit von x und $2x$)

Aufgabe 8.5

$\infty - 3 = \infty$

Aufgabe 8.6

$7 \cdot \infty = \infty$

Aufgabe 8.7

$0 \cdot \infty = \;\ldots$ ist nicht definiert

Begründung: Es lassen sich Funktionen finden, mit denen widersprüchliche Resultate erzeugt werden können. Zum Beispiel:

$$0 \cdot \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} x^2 \stackrel{*}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x^2\right) = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

$$0 \cdot \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \lim_{x\to\infty} x \stackrel{*}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

($*$: wegen der Stetigkeit von $1/x^2$ und x)

Aufgabe 8.8

$-\frac{1}{2}\infty^2 = -\infty$

Aufgabe 8.9

$$\lim_{x\to\infty} \left(7 - 5x^2 + 2x^3 - 3x\right) = \lim_{x\to\infty} 2x^3 = \infty$$

Bei Grenzwerten von Polynomen muss nur das Monom mit dem grössten Exponenten berücksichtigt werden. Begründung: Für grosse $|x|$ gilt:

$$(7 - 5x^2 + 2x^3 - 3x) = x^3\left(\frac{7}{x^3} - \frac{5}{x} + 2 - \frac{3}{x^2}\right) \approx x^3\,(0 - 0 + 2 - 0) = 2x^3$$

Aufgabe 8.10

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-x^4 + 2x + 9\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x^4\right) = -\infty$$

Aufgabe 8.11

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Grad des Zählerpolynoms = Grad des Nennerpolynoms

Aufgabe 8.12

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^4 + x^2 - 3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Grad des Zählerpolynoms < Grad des Nennerpolynoms

Aufgabe 8.13

$$\frac{x^3 - x + 2x - 1}{x^2 + 1} = x + \ldots \text{ hat den Grad } 3 - 2 = 1$$

Aufgabe 8.14

$\frac{4x^5 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 7} = 4x^3 + \ldots$ hat den Grad $5 - 2 = 3$

Aufgabe 8.15

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Die Exponentialfunktion im Nenner strebt schneller gegen ∞ als die Potenzfunktionen.

Aufgabe 8.16

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{1 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{-x^2} = -\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^2} = -\infty$$

Die Exponentialfunktion im Zähler strebt *asymptotisch* schneller gegen ∞ als die Potenzfunktion im Nenner.

Aufgabe 8.17

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$$

Begründung: die Potenzfunktion im Nenner strebt schneller gegen ∞ als die Logarithmusfunktion im Zähler gegen $-\infty$.

Aufgabe 8.18

$$\lim_{x\to 0^+} \log_{10} x = -\infty$$

zur Erinnerung:

Aufgabe 8.19

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4}{\log_2 x} = 0$$

Die Potenzfunktion strebt schneller gegen Null als als die Logarithmusfunktion gegen $-\infty$.