Aufgabe 6.1

Die Aufgaben können mit Hilfe der Formelsammlung oder des Taschenrechners gelöst werden. Am schnellsten geht es aber, wenn man den Verlauf der Graphen der elementaren Funktionen auswendig kennt.

(a) $f(x) = x^2$ ist an der Stelle $x_0 = -501$ monoton fallend

(b) $f(x) = x^3$ ist an der Stelle $x_0 = 27$ monoton wachsend

(c) $f(x) = 1/x$ ist an der Stelle $x_0 = -72$ monoton fallend

(d) $f(x) = \sqrt{x}$ ist an der Stelle $x_0 = 93$ monoton wachsend

(e) $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist an der Stelle $x_0 = -44$ monoton wachsend

(f) $f(x) = \log_{10} x$ ist an der Stelle $x_0 = 0.2$ monoton wachsend

(g) $f(x) = \sin x$ ist an der Stelle $x_0 = 0.1$ monoton wachsend

(h) $f(x) = \cos x$ ist an der Stelle $x_0 = 0.1$ monoton fallend

Aufgabe 6.2

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 7 > 0$ monoton wachsend

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 6}{x - 3}$

$$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x-3) - (x^2+2x-6) \cdot 1}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 6 - x^2 - 2x + 6}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$$

$f'(2) = \dfrac{4 - 12}{(-1)^2} = -8 < 0$ monoton fallend

(c) $f(x) = x \cdot \cos x$

$f'(x) = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \cdot \sin x$

$f'(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$ monoton wachsend

(d) $f(x) = \ln x^2$

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x = \dfrac{2}{x}$

$f'(-1) = \dfrac{2}{-1} = -2 < 0$ monoton fallend

Aufgabe 6.3

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x + 1$

$f'(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

Stellen mit horizontaler Tangente:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0 \overset{\text{TR}}{\Rightarrow} x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 4$

Daraus die Faktorisierung der Ableitungsfunktion ablesen:

$f'(x) = (x-1)(x-4)(x-4)$

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 4$	$4 < x < \infty$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$