Aufgabe 5.1

(a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq -3\} = [-3, \infty)$

(b) $f(x) = x^3 + 5x - 2$

$D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 7x + 12} = \dfrac{x+1}{(x-3)(x-4)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq 3 \wedge x \neq 4\} = \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$

Aufgabe 5.2

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-3)^2}$

$x = 3$: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (gerader Exponent in der Nennernullstelle)

(b) $f(x) = \dfrac{3}{(x+2)^5}$

$x = -2$: Polstelle mit Vorzeichenwechsel (ungerader Exponent in der Nennernullstelle)

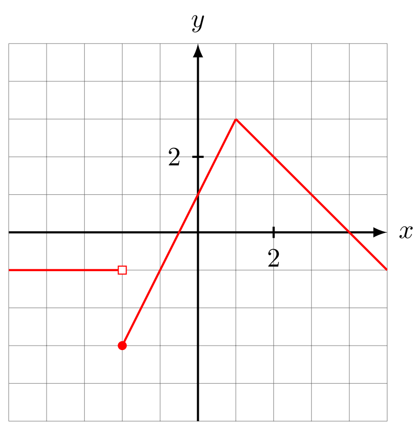
(c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$ wenn $x \neq 1$

$x = 1$: hebbare Singularität

$x = 2$: Polstelle mit Vorzeichenwechsel

Aufgabe 5.3

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } x < -2 \\ 2x + 1 & \text{wenn } -2 \leq x < 1 \\ -x + 4 & \text{sonst} \end{cases}$$



nicht stetig bei $x = -2$

stetig aber nicht differenzierbar bei $x = 1$

Aufgabe 5.4

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 1 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & x < 1 \\ 2x - 4 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) $f(0) = \frac{1}{0} \Rightarrow$ nicht definiert $\Rightarrow$ nicht stetig $\Rightarrow$ nicht diff'bar

(b) $$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 - 4 \cdot 1 + 4 = 1 \Rightarrow \text{definiert} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{stetig}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{1} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{nicht diff'bar}$$

(c) f ist an der Stelle $x = 2$ definiert, stetig und diff'bar.

Aufgabe 5.5

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2 & \text{wenn } x < 2 \\ -x^2 + 3x + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit f bei $x = 2$ stetig ist, muss $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ gelten.

- $f(2) = -2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 3$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 + ax - 2) = \cdots = 2 + 2a$

  * Es genügt, den linksseitigen Grenzwert zu betrachten, da

  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2 + 3x + 1) = \cdots = 3$

  wegen der Stetigkeit von $(-x^2 + 3x + 1)$ gleich $f(2)$ sein muss.

Beide Terme gleichsetzen und nach a auflösen:

$$3 = 2 + 2a \quad \Rightarrow \quad 2a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$