Aufgabe 2.1

(a) $f(4+h) = \sqrt{2(4+h)-3} = \sqrt{8+2h-3} = \sqrt{2h+5}$

(b) $$\begin{aligned} f(-1+h) &= (-1+h)^2 - 2(-1+h) + 5 \\ &= 1 - 2h + h^2 + 2 - 2h + 5 = h^2 - 4h + 6 \end{aligned}$$

(c) $f(2+h) = \dfrac{2(2+h)+1}{3(2+h)+2} = \dfrac{4+2h+1}{6+3h+2} = \dfrac{2h+5}{3h+8}$

Aufgabe 2.2

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$ und $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3

Gegeben: $f(x) = \dfrac{2}{x}$; $x_0 = -2$.

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(-2+h) - f(-2)\big) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{-2+h} - \frac{2}{-2}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h-2} + 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h-2} + \frac{h-2}{h-2}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2+h-2}{h-2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{h-2}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h-2} = \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+5} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}{h \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \qquad \text{(erweitern} \to \text{3. BF)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(h+5) - 5}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{0+5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.5

Für die Tangentengleichung sind die Koordinaten des Kurvenpunktes (x_0, y_0) zusammen mit der gegebenen Steigung m in die Gleichung der Form $y = mx + q$ einzusetzen und nach q aufzulösen:

$$x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4$$

Steigung: $m_t = 6$

$$\begin{aligned}
y_0 &= m_t x_0 + q \\
4 &= 6 \cdot 2 + q \\
q &= -8
\end{aligned}$$

Gleichung der Tangente: $t\colon y = 6x - 8$

Für die Gleichung der Normalen berechnet man deren Steigung m_n aus der Steigung der Tangente m_t und geht dann wie oben vor.

Steigung: $m_n = -\dfrac{1}{m_t} = -\dfrac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
y_0 &= m_t x_0 + q \\
4 &= -\frac{1}{6} \cdot 2 + q \\
4 &= -\frac{1}{3} + q \\
12 &= -1 + 3q \\
13 &= 3q \\
q &= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

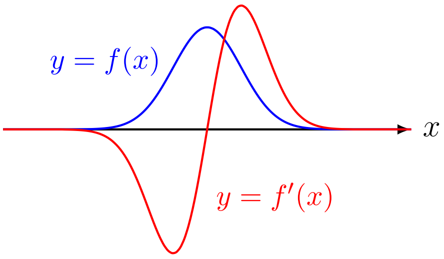
Gleichung der Normalen: $t\colon y = -\dfrac{1}{6}x + \dfrac{13}{3}$

Aufgabe 2.6

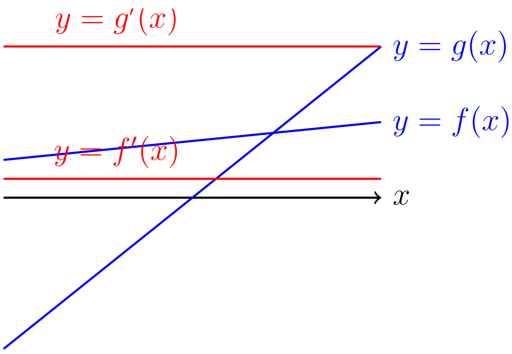
Gegeben: $f(x) = x^4$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3\right) = 4x^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.7



Aufgabe 2.8



Aufgabe 2.9