

Aufgabe 1.1

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 7x + 8) = 3 - 7 + 8 = 4$$

Aufgabe 1.2

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = \cos \pi = -1$$

Aufgabe 1.3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

Aufgabe 1.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 4x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^3 - 4)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 4) = -4$$

Aufgabe 1.5

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8$$

Aufgabe 1.6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x + 5)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 5) = 3$$

Aufgabe 1.7

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x - 3}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{(x + 3)(x - 3)}}{\sqrt{x - 3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 3} \cdot \sqrt{x - 3}}{\sqrt{x - 3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 3} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.8

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{5x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 3)}{5(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{5} = -\frac{2}{5}$$

Aufgabe 1.9

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}{x - 5} &\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - 4x + 3)(x - 5)}{x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 4x + 3) = 8 \end{aligned}$$

* Mit dem Horner-Schema den Zähler durch $(x - 5)$ dividieren:

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -9 & 23 & -15 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

Also: $(x^3 - 9x^2 + 23x - 15) = (x^2 - 4x + 3)(x - 5)$

Aufgabe 1.10

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{(x - 2)^2} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)(x - 2)^2}{(x - 2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3 \end{aligned}$$

* Mit dem Horner-Schema den Zähler zweimal durch $(x - 2)$ dividieren:

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Also: $x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$

Aufgabe 1.11

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 2x - 1}{x^4 - 2x^3 + 1} &\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)}{(x^3 - x^2 - x - 1)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - x - 1} \\ &= \frac{2}{-2} = -1 \end{aligned}$$

* Mit dem Horner-Schema Zähler und Nenner durch $(x - 1)$ teilen:

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Also: $x^4 - 2x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 - x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Also: $x^4 - 2x^3 + 1 = (x - 1)(x^3 - x^2 - x - 1)$

Aufgabe 1.12

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{\sqrt{x} - \sqrt{7}} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{7})(\sqrt{x} + \sqrt{7})}{\sqrt{x} - \sqrt{7}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} (\sqrt{x} + \sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.13

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} &\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3) - 3}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

* Erweitern mit Hilfe der dritten binomischen Formel

Aufgabe 1.14

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{x} + \frac{\sin x}{x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) \stackrel{*}{=} 2 + 1 = 3
\end{aligned}$$

* PAM-Formelsammlung S. 62 (spezielle Grenzwerte)

Aufgabe 1.15

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} 2 \cos x = -2$$

* PAM-Formelsammlung S. 99

Aufgabe 1.16

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} &\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x \right) \stackrel{*}{=} 2 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 2
\end{aligned}$$

* PAM-Formelsammlung S. 62 (spezielle Grenzwerte)

Aufgabe 1.17

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - \cos \pi}{x - \pi} &\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-2 \sin([x + \pi]/2) \sin([x - \pi]/2)}{x - \pi} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin([x + \pi]/2) \sin([x - \pi]/2)}{[x - \pi]/2} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi} \left(-\sin([x + \pi]/2) \cdot \frac{\sin([x - \pi]/2)}{[x - \pi]/2} \right) \\
&\stackrel{**}{=} -\sin(\pi) \cdot 1 = -0 \cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

* PAM-Formelsammlung S. 99 (Summen und Produkte)

** PAM-Formelsammlung S. 62 (Spezielle Grenzwerte)

Aufgabe 1.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Aufgabe 1.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$$

Aufgabe 1.20

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty \quad (\text{divergent})$$

Aufgabe 1.21

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{x-5} = 0$$

Aufgabe 1.22

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (\text{divergent})$$

Aufgabe 1.23

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x^2 + 1}{1/x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/x^2 + 1) \cdot x^3}{(1/x^3 + 1) \cdot x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^3}{1 + x^3} = \frac{0}{1} = 0 \quad (\text{konvergent}) \end{aligned}$$

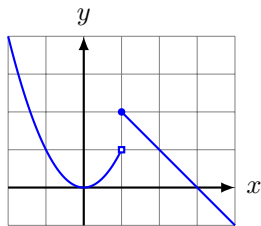
Aufgabe 1.24

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad (\text{divergent})$

Aufgabe 1.25

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-x) = 2$

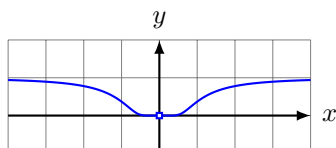
links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein \Rightarrow divergent



Aufgabe 1.26

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x^2} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x^2} = 0$

links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen überein \Rightarrow Grenzwert existiert.



Aufgabe 1.27

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \infty$$

Aufgabe 1.28

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \infty$$

Aufgabe 1.29

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$$

Aufgabe 1.30

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \infty$$

Aufgabe 1.31

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \text{ existiert nicht}$$

Aufgabe 1.32

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Aufgabe 1.33

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Aufgabe 1.34

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = 1$$

Aufgabe 1.35

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 2}{3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2/x}{3/x - 2} = \frac{4 + 0}{0 - 2} = -2$$

Aufgabe 1.36

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + x - 3x^2}{5x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2/x^2 + 1/x - 3}{5 - 2/x + 1/x^2} = -\frac{3}{5}$$

Aufgabe 1.37

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x + 2/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2/x) = \infty$$

Aufgabe 1.38

- Nullstelle des Nenners: $x = 1$ (vertikale Asymptote)

- Polynomdivision:
$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} \\ 3 \end{array}$$

$$(x + 2) : (x - 1) = 1 + \frac{3}{x - 1}$$

$f(x) \approx 1$, wenn $|x|$ gross ist

Aufgabe 1.39

- Nullstelle des Nenners: $x = -2$ ist vertikale Asymptote

• Polynomdivision:
$$\begin{array}{r|rr|rr} & & & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & -6 & \end{array}$$

$$(x^2 + 3x - 4) : (x + 2) = x + 1 - \frac{6}{x + 2}$$

$f(x) \approx x + 1$ wenn $|x|$ gross ist.