

Wachstum und Zerfall

Wachstumsfunktion

$$f(t) = a \cdot b^{k \cdot t} = a \cdot (b^k)^t$$

Für $t = 0$ ergibt sich $f(0) = a$

a : Anfangsbestand

k : Wachstumskonstante

b^k : Wachstumsfaktor (zur Basis b)

t : Zeit

Zerfallsfunktion

$$f(t) = a \cdot b^{-k \cdot t} = a \cdot (b^{-k})^t$$

Für $t = 0$ ergibt sich $f(0) = a$

a : Anfangsbestand

k : Zerfallskonstante

b^{-k} : Zerfallsfaktor (zur Basis b)

t : Zeit

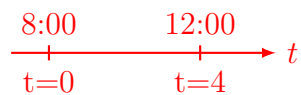
Beispiel 1

Bei einer Bakterienkultur ohne Raum- und Nahrungsmangel wächst die Individuenzahl exponentiell. Um 8 Uhr waren es 2300 und um 12 Uhr 36 800 Individuen. Welches war die Individuenzahl um 9 Uhr?

$A(t)$: Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t

Basis: e (Jedes andere $b > 1$ geht auch.)

Zeitrechnung:



$$A(4) = A(0) \cdot e^{k \cdot 4}$$

$$36\,800 = 2300 \cdot e^{k \cdot 4} \quad || : 2300$$

$$16 = e^{k \cdot 4} \quad || \ln$$

$$\ln 16 = k \cdot 4$$

$$k = (\ln 16)/4 = 0.6931$$

um 9:00:

$$A(1) = A(0) \cdot e^{k \cdot 1} = 2300 \cdot e^{0.6931 \cdot 1} = 4600 \text{ Bakterien}$$

Beispiel 2

Die Anzahl radioaktiver Atomkerne in einem Präparat nimmt exponentiell ab. Zu Beginn des Experimentes waren $5.2 \cdot 10^{20}$ radioaktive Atomkerne vorhanden, nach 5 Stunden waren es noch deren $1.56 \cdot 10^{16}$. Wie viele radioaktive Atomkerne hatte es nach 2 Stunden?

$$N(5) = N(0) \cdot e^{-k \cdot 5} \quad (\text{bekannte Werte einsetzen})$$

$$1.56 \cdot 10^{16} = 5.2 \cdot 10^{20} \cdot e^{-5k} \quad || : 5.2 \cdot 10^{20}$$

$$3 \cdot 10^{-5} = e^{-5k} \quad || \ln$$

$$\ln(3 \cdot 10^{-5}) = -5k$$

$$k = \frac{\ln(3 \cdot 10^{-5})}{-5} = 2.082$$

$$\begin{aligned} \text{Nach 2 Stunden: } N(2) &= N(0) \cdot e^{-k \cdot 2} = 5.2 \cdot 10^{20} \cdot e^{-4.1657} \\ &= 8.070 \cdot 10^{18} \text{ Atomkerne} \end{aligned}$$

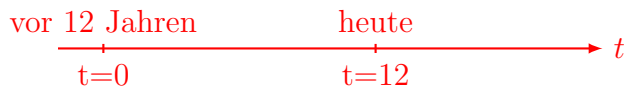
Beispiel 3

Ein Jungwald, in dem kein Holz geschlagen wird, wächst exponentiell. Der Waldbestand beträgt heute $72\,342 \text{ m}^3$. Vor 12 Jahren betrug er $48\,128 \text{ m}^3$.

(a) Welches war der Waldbestand heute vor 5 Jahren?

(b) Welches wird der Waldbestand in 7 Jahren sein?

Zeitstrahl:



$$W(12) = W(0) \cdot e^{k \cdot 12} \quad (\text{bekannte Werte einsetzen})$$

$$72\,342 = 48\,128 \cdot e^{k \cdot 12} \quad || : 48\,128$$

$$1.503 = e^{k \cdot 12} \quad || \ln$$

$$\ln 1.503 = k \cdot 12$$

$$k = \ln(1.503)/12 = 0.033961$$

$$\text{vor 5 Jahren: } W(7) = 48\,128 \cdot e^{0.033961 \cdot 7} = 61\,044 \text{ m}^3$$

$$\text{in 7 Jahren: } W(19) = 48\,128 \cdot e^{0.033961 \cdot 19} = 91\,756 \text{ m}^3$$

Beispiel 4

In einem grösseren Gebiet der Alpen sollen wieder Steinböcke angesiedelt werden. Das Gebiet kann ca. 5000 Steinböcke ohne Störung des biologischen Gleichgewichtes ernähren. Es kann mit einem jährlichen Zuwachs von 6% gerechnet werden, und der maximale Bestand soll erst in 30 Jahren erreicht werden. Wie viele Tiere sind auszusetzen?

Zeitrechnung: heute ($t = 0$)

$$W(1) = W(0) \cdot e^{k \cdot 1} \quad (6\% \text{ Zuwachs in einem Jahr!})$$

$$1.06 = 1 \cdot e^{k \cdot 1} \quad || \ln$$

$$k = \ln 1.06 = 0.0582689$$

$$\text{in 30 Jahren: } S(30) = S(0) \cdot e^{0.0582689 \cdot 30} \quad (\text{nach } S(0) \text{ auflösen})$$

$$S(0) = S(30) / e^{0.0582689 \cdot 30}$$

$$S(0) = 5000 / 5.74349 \approx 870 \text{ Steinböcke}$$

Beispiel 5

Ein Auto verliert jedes Jahr an Wert. Der Autohandel geht (bei einem bestimmten Fahrzeugtyp und mittlerer Fahrleistung) von 20% Wertminderung pro Jahr aus. Der Neupreis beträgt 25 000 Fr.

- (a) Berechne den Wert des Autos nach 5 Jahren.
- (b) In wie vielen Jahren halbiert sich der Wert des Autos?.

$$W(1) = W(0) \cdot e^{-k \cdot 1} \quad (20\% \text{ Wertminderung pro Jahr})$$

$$0.8 = 1 \cdot e^{-k} \quad || \ln$$

$$k = -\ln 0.8 = 0.2231$$

$$\text{Wert in 5 Jahren: } W(5) = W(0) \cdot e^{-0.2231 \cdot 5} = 8192 \text{ Fr.}$$

$$\text{Halbwertszeit } T_{1/2}: 12\,500 = 25\,000 \cdot e^{-0.2231 \cdot T_{1/2}} \quad || : 25\,000$$

$$0.5 = e^{-0.2231 \cdot T_{1/2}}$$

$$\ln 0.5 = -0.2231 \cdot T_{1/2}$$

$$T_{1/2} = 3.1 \text{ Jahre}$$