Vektorgeometrie

Lösungen+

Kollegium St. Fidelis
W. Gehrig
Version vom 20. August 2019

Aufgabe 1.1

Die Menge aller gerichteten Strecken mit gleicher Länge.

Aufgabe 1.2

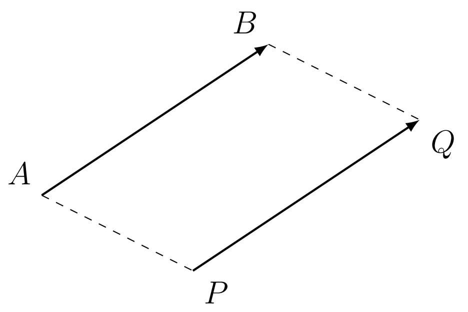
Falsch, denn $\overrightarrow{BA}$ ist Repräsentant des Gegenvektors von $\overrightarrow{AB}$.

Aufgabe 1.3

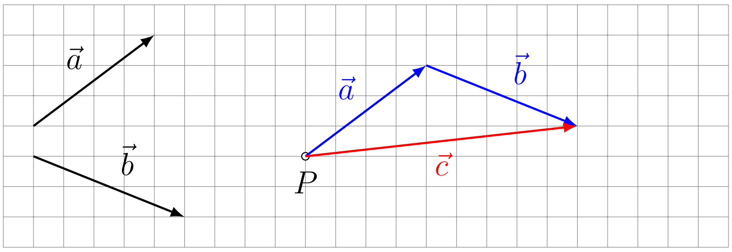
Falsch, denn es gibt zwar unendlich viele Repräsentanten zu einem Vektor aber nur einen mit Anfangspunkt P

Aufgabe 1.4

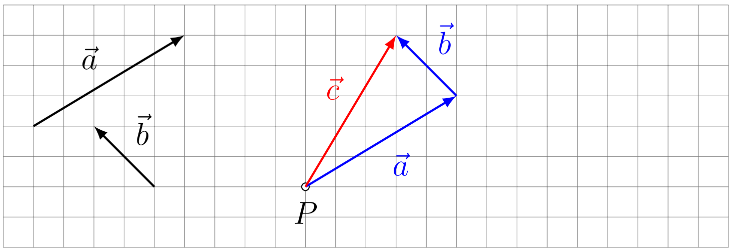
Wahr, wie man anhand der folgenden Skizze erkennen kann:



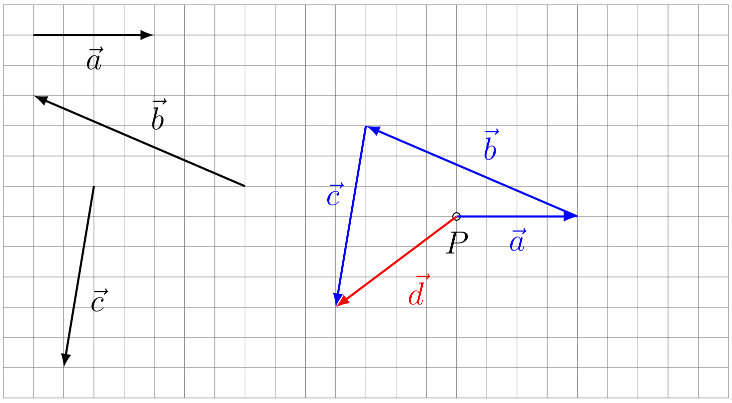
Aufgabe 1.5



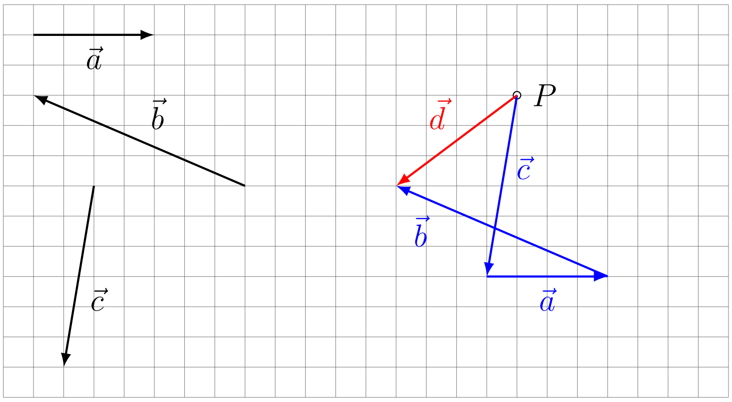
Aufgabe 1.6



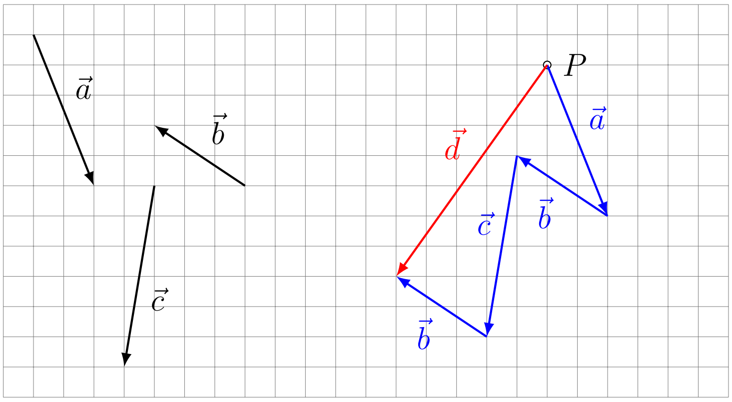
Aufgabe 1.7



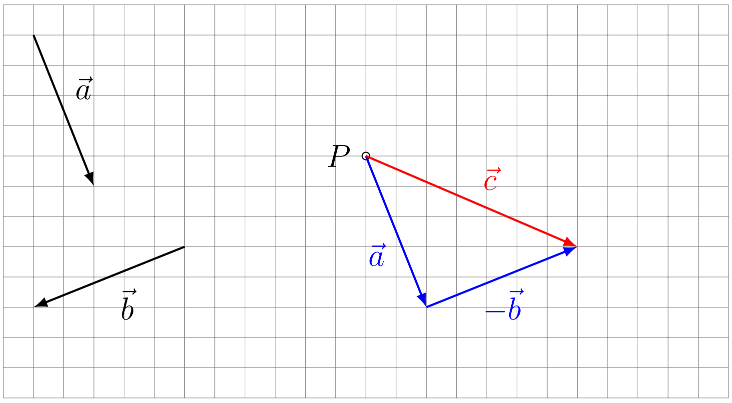
Aufgabe 1.8



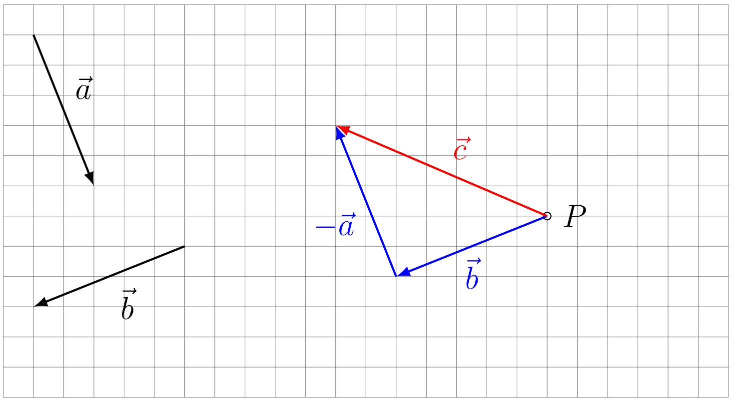
Aufgabe 1.9



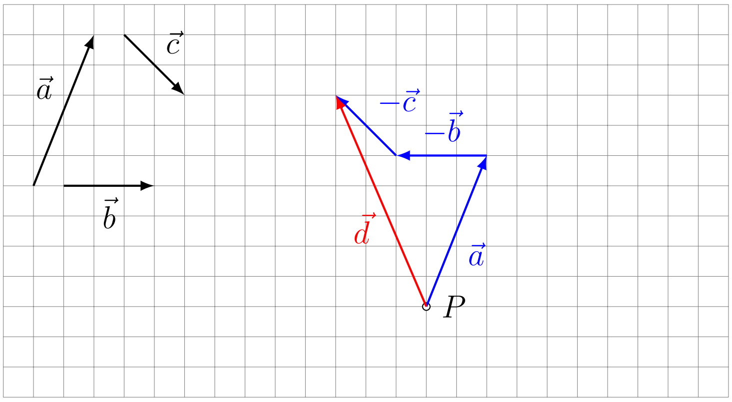
Aufgabe 1.10



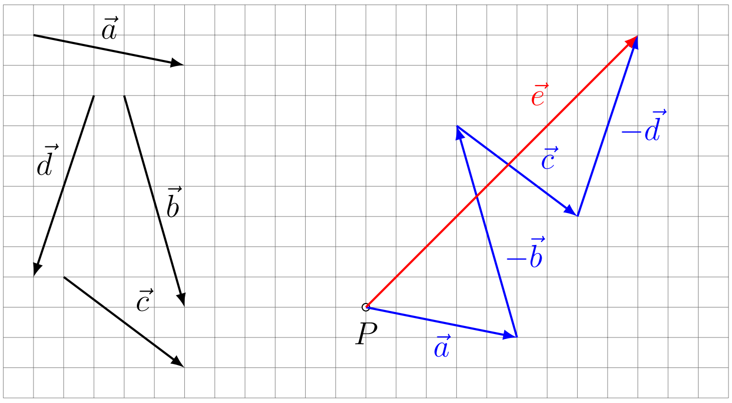
Aufgabe 1.11



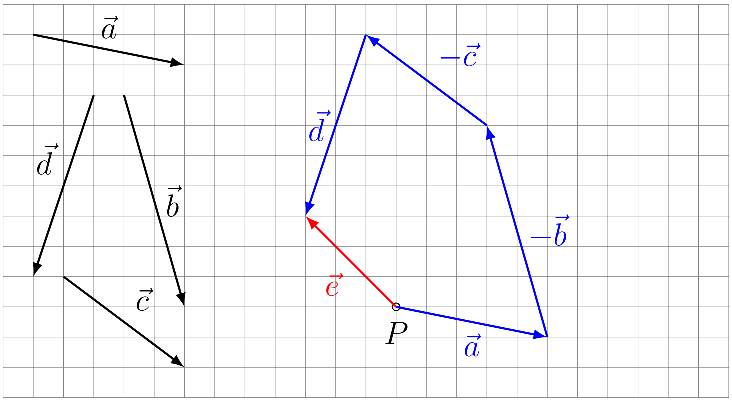
Aufgabe 1.12



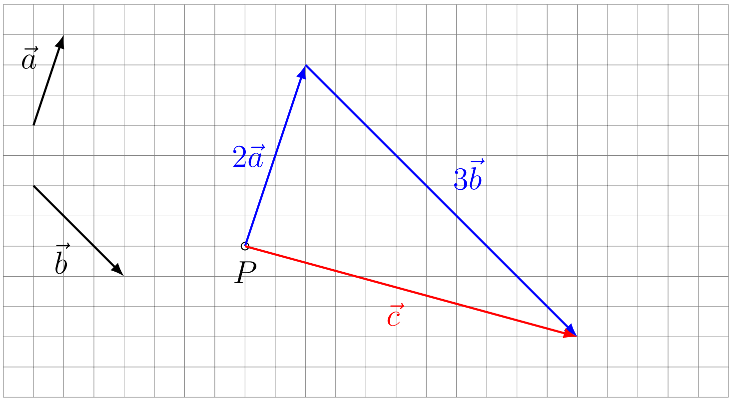
Aufgabe 1.13



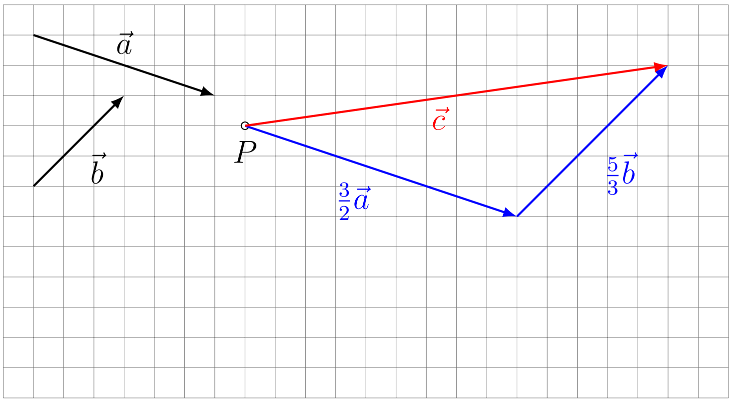
Aufgabe 1.14



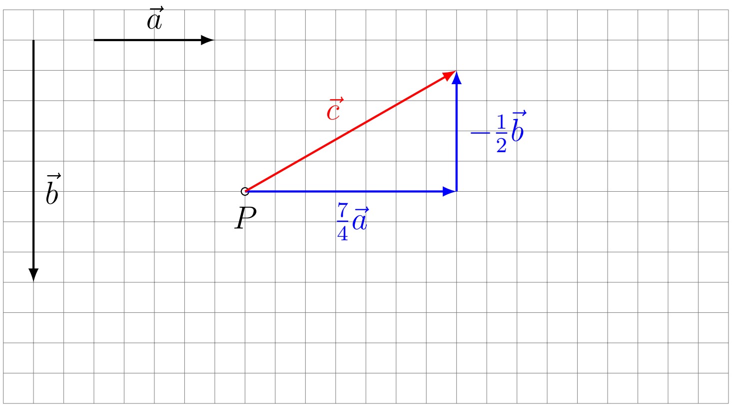
Aufgabe 1.15



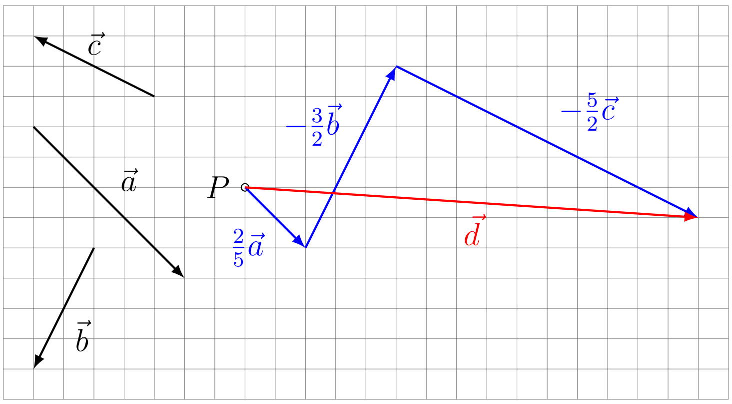
Aufgabe 1.16



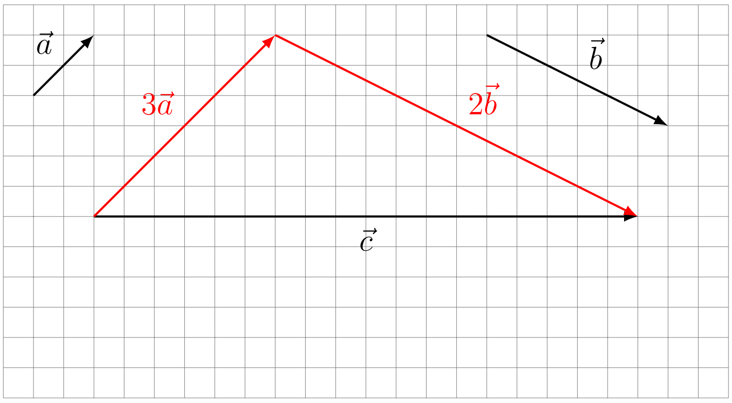
Aufgabe 1.17



Aufgabe 1.18

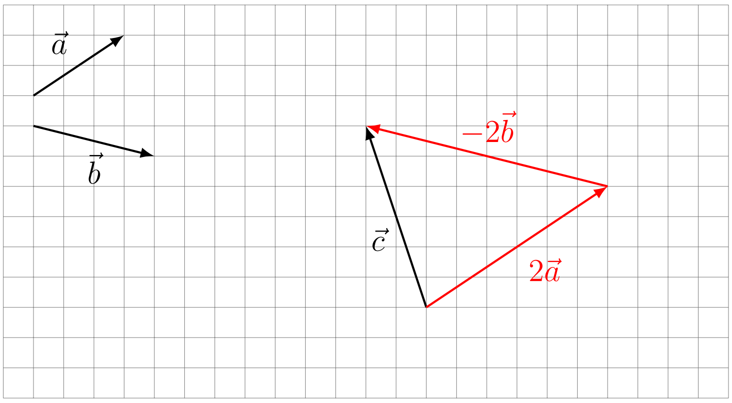


Aufgabe 1.19



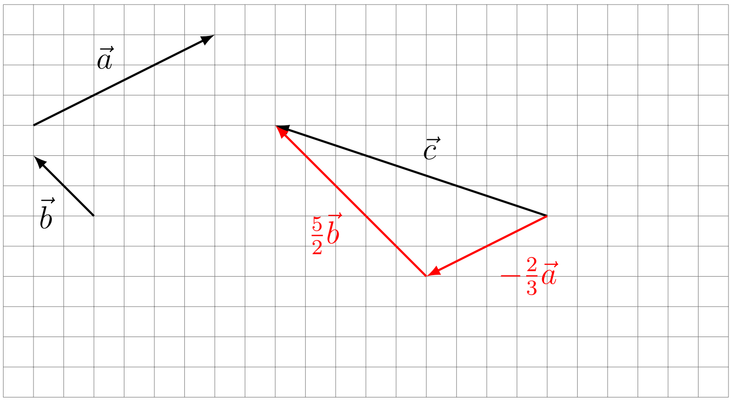
$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

Aufgabe 1.20



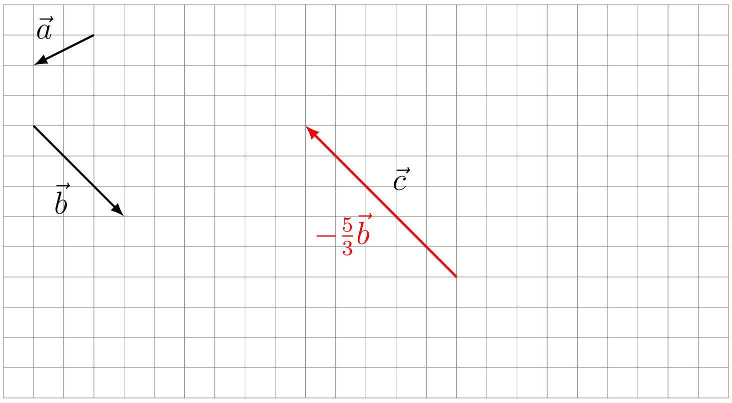
$\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$

Aufgabe 1.21



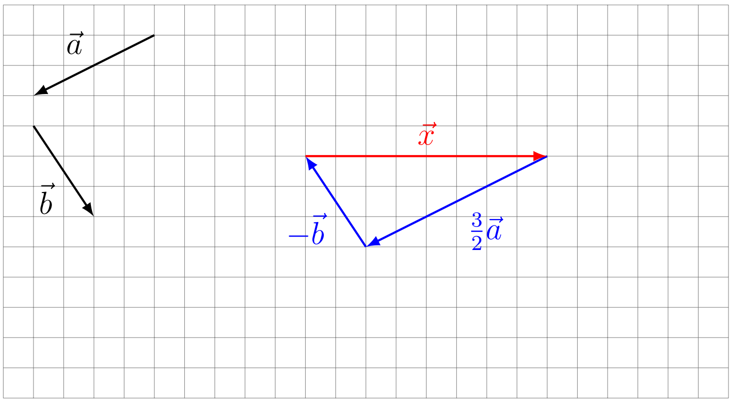
$\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}$

Aufgabe 1.22



$\vec{c} = -\frac{5}{3}\vec{b}$

Aufgabe 1.23



Aufgabe 1.24

$$
\begin{aligned}
3\vec{x} - 2\vec{a} + \vec{b} &= \tfrac{1}{2}\left(\vec{x} + 4\vec{a}\right) - 3\vec{b} && || \cdot 2 \\
6\vec{x} - 4\vec{a} + 2\vec{b} &= \vec{x} + 4\vec{a} - 6\vec{b} && || - \vec{x} + 4\vec{a} - 2\vec{b} \\
5\vec{x} &= 8\vec{a} - 8\vec{b} && || \cdot \tfrac{1}{5} \\
\vec{x} &= \tfrac{8}{5}\vec{a} - \tfrac{8}{5}\vec{b}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.25

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left(2\vec{x} + \vec{b}\right) - \tfrac{3}{4}\left(3\vec{a} - \vec{x}\right) &= \tfrac{1}{4}\left(4\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{x} && || \cdot 4 \\
2\left(2\vec{x} + \vec{b}\right) - 3\left(3\vec{a} - \vec{x}\right) &= 4\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{x} && \text{Distributivgesetz} \\
4\vec{x} + 2\vec{b} - 9\vec{a} + 3\vec{x} &= 4\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{x} && || - 4\vec{x} - 2\vec{b} + 9\vec{a} \\
3\vec{x} &= 13\vec{a} - \vec{b} && || \cdot \tfrac{1}{3} \\
\vec{x} &= \tfrac{13}{3}\vec{a} - \tfrac{1}{3}\vec{b}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.26

$$
\begin{aligned}
2\left(\vec{x}-\vec{a}\right)-3\left(2\vec{a}-5\vec{b}\right) &= \tfrac{1}{2}\left(\vec{x}-2\vec{b}\right) && ||\cdot 2\\
4\left(\vec{x}-\vec{a}\right)-6\left(2\vec{a}-5\vec{b}\right) &= \vec{x}-2\vec{b} && \text{Distributivgesetz}\\
4\vec{x}-4\vec{a}-12\vec{a}+30\vec{b} &= \vec{x}-2\vec{b} && ||-\vec{x}+16\vec{a}-30\vec{b}\\
3\vec{x} &= 16\vec{a}-32\vec{b} && ||\cdot \tfrac{1}{3}\\
\vec{x} &= \tfrac{16}{3}\vec{a}-\tfrac{32}{3}\vec{b}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.27

$$\overrightarrow{BC} = -\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}-\vec{u}$$

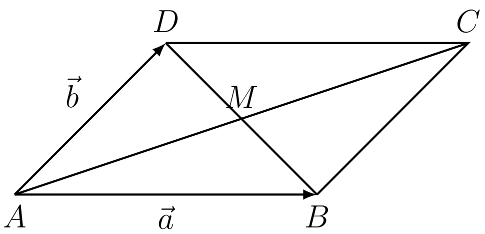
$$\overrightarrow{CB} = -\vec{v}+\vec{u}$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} = \vec{u}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{u}+\tfrac{1}{2}\left(-\vec{u}+\vec{v}\right)\\
&= \vec{u}-\tfrac{1}{2}\vec{u}+\tfrac{1}{2}\vec{v} = \tfrac{1}{2}\vec{u}+\tfrac{1}{2}\vec{v}
\end{aligned}
$$

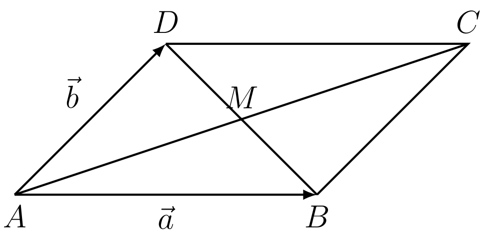
$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\tfrac{1}{2}\vec{u}-\tfrac{1}{2}\vec{v}$$

Aufgabe 1.28

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \vec{a}+\vec{b}$$
$$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$$



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = \vec{b}-\vec{a} = -\vec{a}+\vec{b}$$
$$\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$$



$$\overrightarrow{AM} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{MB} = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} = -\tfrac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right) = \tfrac{1}{2}\vec{a}-\tfrac{1}{2}\vec{b}$$

Aufgabe 1.29

$\overrightarrow{CE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
$\overrightarrow{FD} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\left(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
$\overrightarrow{EK} = \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$
$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$
$\overrightarrow{BG} = \vec{b} + \vec{c}$
$\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$
$\overrightarrow{EC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
$\overrightarrow{HF} = \vec{a} - \vec{b}$

Aufgabe 1.31

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$

Aufgabe 1.32

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Aufgabe 1.33

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Aufgabe 1.34

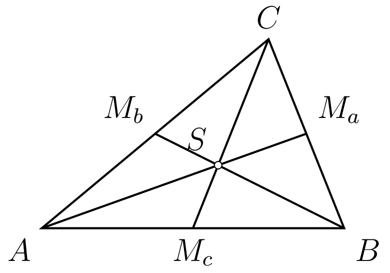
$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$

Aufgabe 1.35

$\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XY} = 2\overrightarrow{XY}$

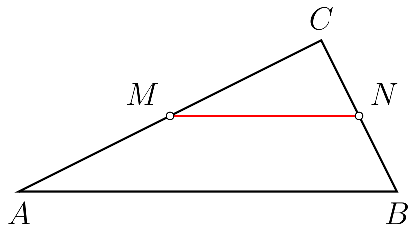
Aufgabe 1.36

Im Dreieck teilt der Schwerpunkt die Schwerlinien, von der Ecke aus gemessen, im Verhältnis $2:1$.



$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{M_aA}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{M_bB}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{M_cC}$$
$$=\tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\big)+\tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\big)+\tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\big)$$
$$=\tfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$$

Zu zeigen: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

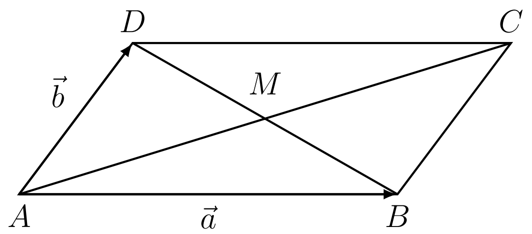


$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$
$$=\tfrac{1}{2}\big(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\big)=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\quad \text{W.z.b.w.}$$

Aufgabe 2.1

$\vec{a} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{l}$, $\vec{b} = -1 \cdot \vec{h}$, $\vec{c} = 2 \cdot \vec{g}$, $\vec{d} = \frac{3}{5} \cdot \vec{e}$

Aufgabe 2.2



(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

(b) geschlossene Vektorkette, die den Punkt M enthält:

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$
$$\overrightarrow{MD} = \beta \cdot \overrightarrow{BD} = \beta \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$
$$\overrightarrow{DA} = -\vec{b}$$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} &= \vec{0} \\ \alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \beta \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) - \vec{b} &= \vec{0} \\ (\alpha - \beta) \cdot \vec{a} + (\alpha + \beta - 1) \cdot \vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

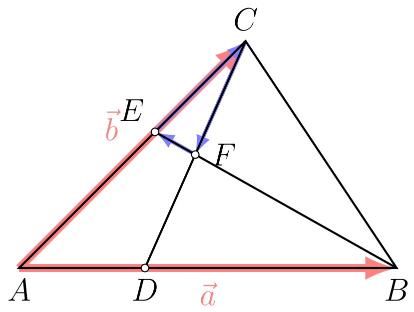
(e) Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 0 \\ \alpha + \beta - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2} \\ \beta &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{(was man erraten konnte)}$$

(f) Geometrische Interpretation:

Der Punkt M teilt die Strecken AC und BD im Verhältnis 1 : 2.

Aufgabe 2.3



(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

(b) Geschlossene Vektorkette, die den Punkt F enthält:

$\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$\overrightarrow{EC} = \frac{2}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{CF} = \alpha\overrightarrow{CD} = \alpha\left(-\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) = -\alpha\vec{b} + \frac{1}{3}\alpha\vec{a}$

$\overrightarrow{FE} = \beta\overrightarrow{BE} = \beta\left(-\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}\right) = -\beta\vec{a} + \frac{3}{5}\beta\vec{b}$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} &= \vec{0} \\
\tfrac{2}{5}\vec{b} - \alpha\vec{b} + \tfrac{1}{3}\alpha\vec{a} - \beta\vec{a} + \tfrac{3}{5}\beta\vec{b} &= \vec{0} \\
\left(\tfrac{1}{3}\alpha - \beta\right)\vec{a} + \left(\tfrac{2}{5} - \alpha + \tfrac{3}{5}\beta\right)\vec{b} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

(d) Lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\alpha - \beta &= 0 \\ \tfrac{2}{5} - \alpha + \tfrac{3}{5}\beta &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{3}\alpha - \beta &= 0 \\ -\alpha + \tfrac{3}{5}\beta &= -\tfrac{2}{5} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2} \\ \beta &= \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

- Der Punkt F teilt die Strecke BE im Verhältnis $5:1$.
- Der Punkt F teilt die Strecke CD im Verhältnis $1:1$.

Aufgabe 2.4

(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

(b) Geschlossene Vektorkette, die den Punkt F enthält:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$
$$\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BD} = \alpha\left(-\vec{a} + \tfrac{1}{4}\vec{b}\right) = -\alpha\vec{a} + \tfrac{1}{4}\alpha\vec{b}$$
$$\overrightarrow{FA} = \beta\overrightarrow{EA} = \beta\left(\tfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \vec{b}\right) = \beta\left(\tfrac{1}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right) - \vec{b}\right) = -\tfrac{1}{3}\beta\vec{a} - \tfrac{2}{3}\beta\vec{b}$$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA} &= \vec{0} \\ \vec{a} - \alpha\vec{a} + \tfrac{1}{4}\alpha\vec{b} - \tfrac{1}{3}\beta\vec{a} - \tfrac{2}{3}\beta\vec{b} &= \vec{0} \\ \left(1 - \alpha - \tfrac{1}{3}\beta\right)\vec{a} + \left(\tfrac{1}{4}\alpha - \tfrac{2}{3}\beta\right)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

(e) Lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha - \tfrac{1}{3}\beta &= 0 \\ \tfrac{1}{4}\alpha - \tfrac{2}{3}\beta &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} -3\alpha - \beta &= -3 \\ 3\alpha - 8\beta &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{8}{9} \\ \beta &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

- Der Punkt F teilt die Strecke AE im Verhältnis $1 : 2$.
- Der Punkt F teilt die Strecke BD im Verhältnis $8 : 1$.

Aufgabe 2.5

(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

(b) Geschlossene Vektorkette, die den Punkt F enthält:

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AF} = \alpha\big(\vec{b} + \tfrac{2}{3}\vec{a}\big) = \alpha\vec{b} + \tfrac{2}{3}\alpha\vec{a}$$

$$\overrightarrow{GD} = \beta\overrightarrow{ED} = \beta\big(\tfrac{3}{4}\vec{b} - \vec{a}\big) = \tfrac{3}{4}\beta\vec{b} - \beta\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DA} = -\vec{b}$$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DA} &= \vec{0} \\ \alpha\vec{b} + \tfrac{2}{3}\alpha\vec{a} + \tfrac{3}{4}\beta\vec{b} - \beta\vec{a} - \vec{b} &= \vec{0} \\ \big(\tfrac{2}{3}\alpha - \beta\big)\vec{a} + \big(\alpha + \tfrac{3}{4}\beta - 1\big)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

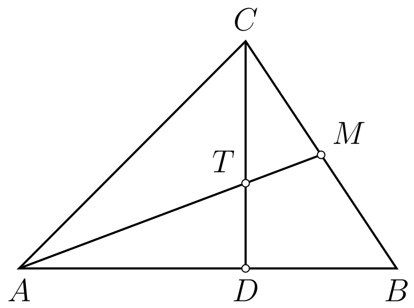
(e) Lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}\alpha - \beta &= 0 \\ \alpha + \tfrac{3}{4}\beta - 1 &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 2\alpha - 3\beta &= 0 \\ 4\alpha + 3\beta - 4 &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{2}{3} \\ \beta &= \tfrac{4}{9} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

- Der Punkt G teilt die Strecke AF im Verhältnis $2:1$.
- Der Punkt G teilt die Strecke DE im Verhältnis $4:5$.

Aufgabe 2.6



(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

(b) Geschlossene Vektorkette, die den Punkt T enthält:

$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\overrightarrow{AT} = \tfrac{3}{4}\overrightarrow{AM} = \tfrac{3}{4} \cdot \left[\tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\right] = \tfrac{3}{8}\vec{a} + \tfrac{3}{8}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{TC} = \alpha\overrightarrow{DC} = \alpha\big(-\beta\vec{a} + \vec{b}\big) = -\alpha\beta\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$\overrightarrow{CA} = -\vec{b}$$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$\tfrac{3}{8}\vec{a} + \tfrac{3}{8}\vec{b} - \alpha\beta\vec{a} + \alpha\vec{b} - \beta\,\vec{a} = \vec{0}$$

$$\big(\tfrac{3}{8} + \alpha\beta - \beta\big)\vec{a} + \big(\tfrac{3}{8} + \alpha\big)\vec{b} = \vec{0}$$

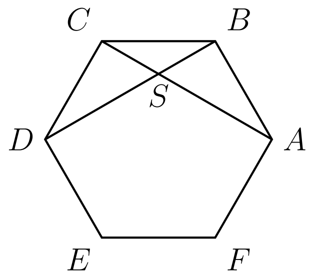
(e) Lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{8} + \alpha\beta - \beta &= 0 \\ \tfrac{3}{8} + \alpha &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{3}{5} \\ \beta &= \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

- Der Punkt T teilt die Strecke CD im Verhältnis 3 : 2.
- (Der Punkt D teilt die Strecke AB im Verhältnis 3 : 2.)

Aufgabe 2.7



(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$

(b) Geschlossene Vektorkette via S:

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$\overrightarrow{DA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha\big(-\vec{a} + \vec{b}\big) = -\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

$\overrightarrow{SD} = \beta\overrightarrow{BD} = \beta\big(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\big) = -\frac{1}{2}\beta\vec{a} - \beta\vec{b}$

(d) Einsetzen und nach Vektoren sortieren:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} &= \vec{0} \\ \vec{a} - \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} - \tfrac{1}{2}\beta\vec{a} - \beta\vec{b} &= \vec{0} \\ (1 - \alpha - \tfrac{1}{2}\beta)\vec{a} + (\alpha - \beta)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

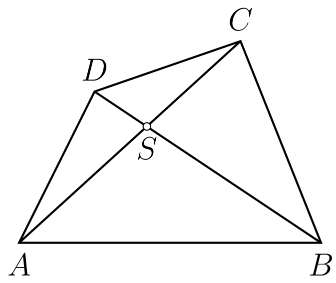
(e) Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha - \tfrac{1}{2}\beta &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2 - 2\alpha - \beta &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{2}{3} \\ \beta &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

Die Strecken AC und DB teilen sich im Verhältnis $2:1$.

Aufgabe 2.8



(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

(b) Geschlossene Vektorkette, die den Punkt S enthält:

$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha\big(\tfrac{2}{5}\vec{a} + \tfrac{4}{3}\vec{b}\big) = \tfrac{2}{5}\alpha\vec{a} + \tfrac{4}{3}\alpha\vec{b}$$

$$\overrightarrow{SB} = \beta\overrightarrow{DB} = \beta\big(-\vec{b} + \vec{a}\big) = \beta\vec{a} - \beta\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} &= \vec{0} \\ \tfrac{2}{5}\alpha\vec{a} + \tfrac{4}{3}\alpha\vec{b} + \beta\vec{a} - \beta\vec{b} - \vec{a} &= \vec{0} \\ \big(\tfrac{2}{5}\alpha + \beta - 1\big)\vec{a} + \big(\tfrac{4}{3}\alpha - \beta\big)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

(e) Lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}\alpha + \beta - 1 &= 0 \\ \tfrac{4}{3}\alpha - \beta &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{2}{5}\alpha + \tfrac{4}{3}\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{15}{26} \\ \beta &= \tfrac{10}{13} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

- Der Punkt S teilt die Diagonale AC im Verhältnis $15 : 11$.
- Der Punkt S teilt die Diagonale BD im Verhältnis $10 : 3$.

Aufgabe 3.1

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+7 \\ 1+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-4) \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3

$$\vec{v} = -6 \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.5

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 32 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.6

$$\vec{v} = 4\vec{a} + 3\vec{b} - 6\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 0 \\ 12 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 33 \\ 2 \\ -15 \\ -28 \end{pmatrix}$$

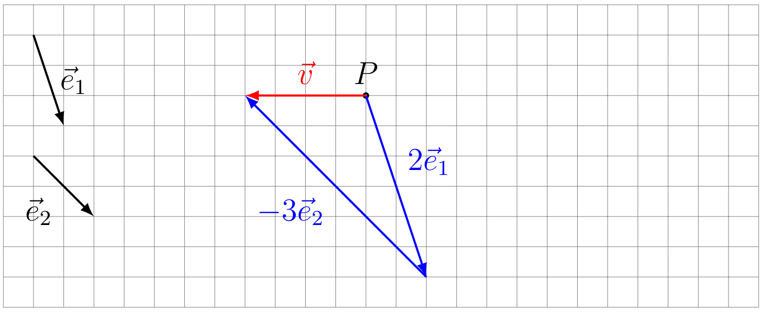
Aufgabe 3.7

$$\begin{aligned} 4 &= x - 5 \\ y &= -3 + 2y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

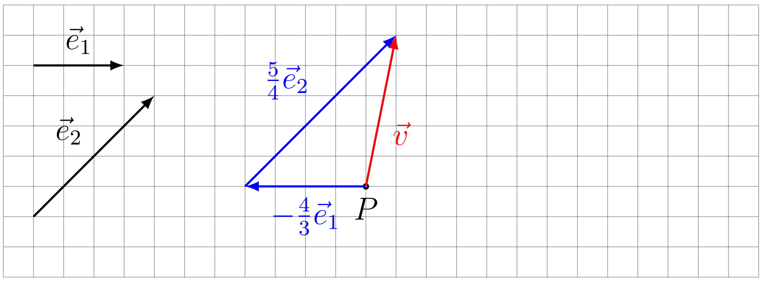
Aufgabe 3.8

$$\begin{aligned} x &= 1 - (0 - 2x) \\ -3 &= 2y - (y - 4) \\ z &= 2 - (3z + 1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1 + 2x \\ -3 &= 2y - y + 4 \\ z &= 2 - 3z - 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= -7 \\ z &= 1/4 \end{aligned}$$

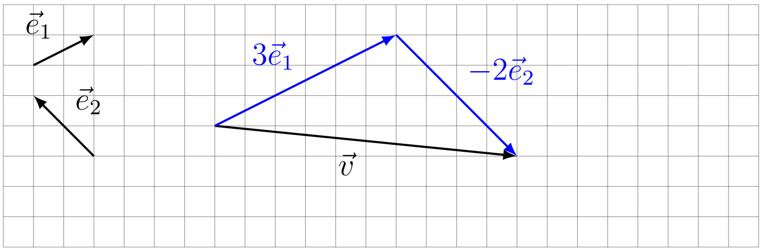
Aufgabe 3.9



Aufgabe 3.10

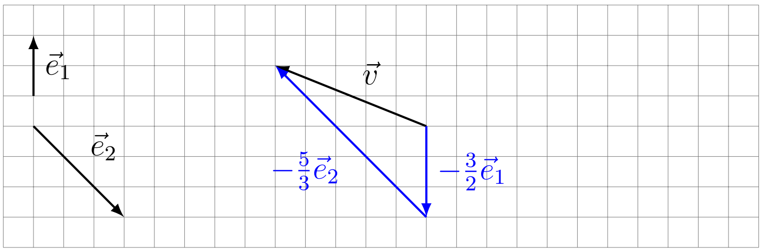


Aufgabe 3.11



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.12



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.13

$2\vec{x} = \vec{0} - \vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c} + 7\vec{d}$

$$2\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.14

Hat die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

- nur die Lösung $\alpha = \beta = 0$: linear unabhängig
- daneben noch weitere Lösungen: linear abhängig

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -3 & -12 & 0 \\ 5 & 20 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ linear abhängig (kollinear)

Aufgabe 3.15

Hat die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

- nur die Lösung $\alpha = \beta = 0$: linear unabhängig
- daneben noch weitere Lösungen: linear abhängig

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nur die Lösung $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow$ linear unabhängig

Aufgabe 3.16

Hat die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

- nur die Lösung $\alpha = \beta = 0$: linear unabhängig
- daneben noch weitere Lösungen: linear abhängig

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 16 & -24 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ linear abhängig (kollinear)

Aufgabe 3.17

Hat die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$

- nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$: linear unabhängig
- daneben noch weitere Lösungen: linear abhängig

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ linear abhängig (komplanar)

Aufgabe 3.18

Hat die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}$

- nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$: linear unabhängig
- daneben noch weitere Lösungen: linear abhängig

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \Rightarrow$ linear unabhängig

Aufgabe 3.19

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$

Aufgabe 3.20

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 5 \\ -3 & 6 & 5 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$

Aufgabe 3.21

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = 9\vec{b} - 7\vec{c}$

(Vektor $\vec{a}$ wird für die Darstellung nicht benötigt.)

Aufgabe 4.1

$P'(3, 4, 8)$

Aufgabe 4.2

$P'(-3, 0, -6)$

Aufgabe 4.3

$P'(-7, 5, 0)$

Aufgabe 4.4

$P'(-3, -10, -3)$

Aufgabe 4.5

$P'(1, 7, 6)$

Aufgabe 4.6

$P'(2, -9, 3)$

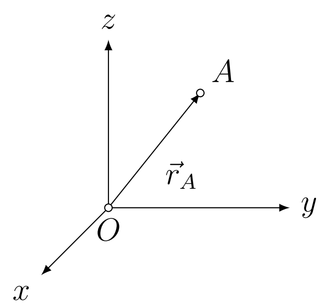
Aufgabe 4.7

$P'(5, 6, 1)$

Aufgabe 4.8

$P'(3, -6, 0)$

Aufgabe 4.9

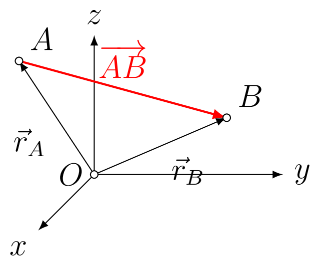


$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.10

$B(-2, 1, 7)$

Aufgabe 4.11



$$\overrightarrow{AB} = -\vec{r}_A + \vec{r}_B = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.12

$$\overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.13

$$\overrightarrow{QQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_Q = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.14

$$\begin{aligned} \vec{r}_M &= \frac{1}{2}[\vec{r}_A + \vec{r}_B] \\ &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$M(6, 3, -2)$

Aufgabe 4.15

$$\begin{aligned} \vec{r}_S &= \frac{1}{3}[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C] \\ &= \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

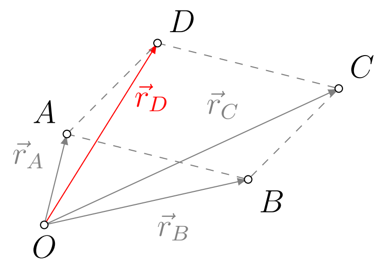
$S(2, 5, -3)$

Aufgabe 4.16

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4}\left[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}4\\7\\-9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\12\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\-4\\-6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\13\\-3\end{pmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}16\\28\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\-3\end{pmatrix}$$

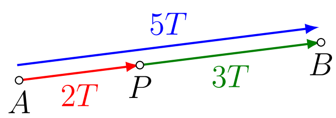
$S(4, 7, -3)$

Aufgabe 4.17



$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC}$$
$$= \begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D(7, 0, 3)$$

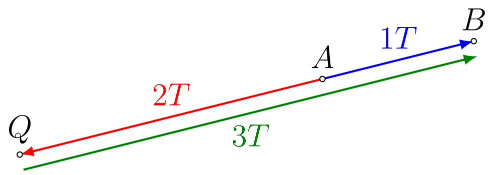
Aufgabe 4.18



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{2}{2+3}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\7\end{pmatrix}$$

$P(2, 0, 7)$

Aufgabe 4.19



$$\vec{r}_Q = \vec{r}_A + \frac{2}{2-3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 12 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$Q(-22, 12, -29)$

Aufgabe 4.20

A, B und C liegen genau dann in einer Ebene, wenn $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ linear abhängig sind.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -33 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -33 & -11 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\tfrac{1}{3}\beta$$

$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear abhängig

A, B und C liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 4.21

A, B und C liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ linear abhängig sind.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig.

A, B und C liegen nicht auf einer Geraden.

Aufgabe 4.22

A, B und C liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ linear abhängig sind.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -8 & 6 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha = 3 \\ \beta = 4 \end{matrix}$$

$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear abhängig.

A, B und C liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 4.23

A, B, C und D liegen genau dann in einer Ebene, wenn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ linear abhängig sind.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{matrix}$$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ sind linear unabhängig.

A, B, C und D liegen nicht in einer Ebene.

Aufgabe 4.24

A, B, C und D liegen genau dann in einer Ebene, wenn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ linear abhängig sind.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{matrix}$$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ sind linear unabhängig.

A, B, C und D liegen nicht in einer Ebene.

Aufgabe 4.25

$$\vec{r}_S = \frac{1}{3}\left[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right]$$

$$3\vec{r}_S = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$$

$$\vec{r}_C = 3\vec{r}_S - \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_C = 3\begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\7\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-4\\9\end{pmatrix}$$

$C(6, -4, 9)$

Aufgabe 4.26

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4}\left[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\right]$$

$$4\vec{r}_S = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D$$

$$\vec{r}_D = 4\vec{r}_S - \vec{r}_A - \vec{r}_B - \vec{r}_C$$

$$\vec{r}D = 4\begin{pmatrix}6\\\frac{5}{4}\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\10\\-15\end{pmatrix}$$

$D(14, 10, -15)$

Aufgabe 4.27

$$|\vec{v}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Aufgabe 4.28

$$|\vec{v}| = \sqrt{81+400+144} = \sqrt{625} = 25$$

Aufgabe 4.29

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}9\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\15\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$$

Aufgabe 4.30

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix}12\\-2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\\-6\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49+36+36} = \sqrt{121} = 11$$

Aufgabe 4.31

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 25 + 1 + 16 + 49} = \sqrt{100} = 10$$

Aufgabe 4.32

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \ |\overrightarrow{AB}| = 3$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \ |\overrightarrow{BC}| = 3$$

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \ |\overrightarrow{CA}| = 2$$

$$u = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}| = 3 + 3 + 2 = 8$$

Aufgabe 4.33

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \ |\overrightarrow{AB}| = 7$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \ |\overrightarrow{BC}| = 6$$

$$u = 2(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|) = 2(7 + 6) = 26$$

Aufgabe 4.34

$$|\vec{v}| = \sqrt{16 + 36 + 144} = \sqrt{196} = 14$$

Faktor: $\dfrac{21}{14} = \dfrac{3}{2}$

$$\vec{w}_1 = \frac{3}{2}\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = -\frac{3}{2}\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.35

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}| &= 3 \\
\left|\begin{pmatrix} 5-x \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| &= 3 \\
\sqrt{(5-x)^2+1+4} &= 3 \\
(5-x)^2+1+4 &= 9 \\
(5-x)^2 &= 4 \\
x_1 &= 3 \\
x_2 &= 7
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.36

$P(0,y,0)$; $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7-y \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{16+(7-x)^2+144} &= 13 \\
160+(7-x)^2 &= 196 \\
(7-x)^2 &= 36 \\
x_1 &= 1 \Rightarrow P_1(0,1,0) \\
x_2 &= 13 \Rightarrow P_2(0,13,0)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.37

$P(x,0,0)$; $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 4-x \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 6-x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{PA}| &= |\overrightarrow{PB}| \\
\sqrt{(4-x)^2+1+25} &= \sqrt{(6-x)^2+9+1} \\
(4-x)^2+26 &= (6-x)^2+10 \\
16-8x+x^2+26 &= 36-12x+x^2+10 \\
42-8x &= 46-12x \\
4x &= 4 \\
x &= 1 \quad \Rightarrow \quad P(1,0,0)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.38

$$P(0,y,0);\ \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3-y \\ 2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9-y \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PA}| = 2|\overrightarrow{PB}|$$

$$\sqrt{64+(3-y)^2+4} = 2\sqrt{1+(9-y)^2+1}$$

$$68+9-6y+y^2 = 4(2+81-18y+y^2)$$

$$y^2-6y+77 = 4y^2-72y+332$$

$$0 = 3y^2-66y+255$$

$$0 = y^2-22y+85$$

$$0 = (y-5)(y-17)$$

$y_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad P_1(0,5,0)$
$y_2 = 17 \quad \Rightarrow \quad P_2(0,17,0)$

Aufgabe 4.39

$$P(0,0,z);\ \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4-z \end{pmatrix};\ \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1-z \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{16+49+(-4-z)^2} &= \sqrt{25+25+(1-z)^2} \\
(4+z)^2+65 &= (1-z)^2+50 \\
16+8z+z^2+65 &= 1-2z+z^2+50 \\
81+8z &= 51-2z \\
10z &= -30 \\
z &= -3 \quad \Rightarrow \quad P(0,0,-3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.40

$P(x,0,0)$; $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 7-x \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -1-x \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{PA}| &= 2|\overrightarrow{PB}| \\
\sqrt{(7-x)^2+9+36} &= 3\sqrt{(-1-x)^2+1+4} \\
49-14x+x^2+45 &= 9(1+2x+x^2+5) \\
x^2-14x+94 &= 9x^2+18x+54 \\
0 &= 8x^2+32x-40 \\
0 &= x^2+4x-5 \\
x_1 &= 5 \quad \Rightarrow \quad P(5,0,0) \\
x_2 &= 17 \quad \Rightarrow \quad P(17,0,0)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.1

$-\frac{4}{3}\vec{a} = \begin{pmatrix} 28 \\ -32 \\ -20 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

Aufgabe 5.3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$

Aufgabe 5.4

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 40 \cdot 0.5 = 20$$

Aufgabe 5.5

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 4.5 \cdot 2.1 \cdot \cos 90^\circ = 4.5 \cdot 2.1 \cdot 0 = 0$$

Aufgabe 5.6

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 11 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 11 \cdot 6 \cdot \frac{-1}{2} = -33$$

Aufgabe 5.7

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 9 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = 18 \cdot (-1) = -18$$

Aufgabe 5.8

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos\frac{-4}{4 \cdot \sqrt{2}} = \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^\circ$$

Aufgabe 5.9

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos\frac{6\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$$

Aufgabe 5.10

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos\frac{0}{5\cdot 2} = \arccos 0 = 90^\circ$$

Aufgabe 5.11

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = 1$$

$$\varphi = \arccos 1 = 0^\circ$$

Aufgabe 5.12

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Aufgabe 5.13

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot 1 = |\vec{a}|^2$$

Aufgabe 5.14

$$\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$$

$$|\vec{c}|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$\overset{(*)}{=} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

$(*)$ wegen $\vec{a}\perp\vec{b}$ gilt $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Aufgabe 5.15

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = 2\cdot 4 + 3\cdot(-1) = 5$$

Aufgabe 5.16

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = (-7)\cdot 3 + 3\cdot 7 = 0$$

Aufgabe 5.17

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 15 - 16 + 4 = 3$$

Aufgabe 5.18

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 16 + 1 + 9 = 26$$

Aufgabe 5.19

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 7 + 0 - 15 + 8 = 0$$

Aufgabe 5.20

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = 60.26°$$

Aufgabe 5.21

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \arccos \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = 60° \end{aligned}$$

Aufgabe 5.22

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{70} \cdot \sqrt{14}} = 90°$$

Aufgabe 5.23

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{-84}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{126}} = 180°$$

Aufgabe 5.24

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \arccos \frac{78}{\sqrt{104} \cdot \sqrt{78}} = 30^\circ$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \arccos \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \arccos \frac{26}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{104}} = 60^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$$

Aufgabe 5.25

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \arccos \frac{39}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{117}} = 30^\circ$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \arccos \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \arccos \frac{-13}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{26}} = 108.43^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 26.57^\circ$$

Aufgabe 5.26

$$\cos 90^\circ = \frac{12 + 2z}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{26 + z^2}}$$

$$0 = 12 + 2z$$

$$z = -6$$

Aufgabe 5.27

$$\cos 90^\circ = \frac{t^2 - 7t + 12}{\sqrt{t^2 + 58} \cdot \sqrt{2t^2 + 16}}$$

$$0 = (t-3)(t-4)$$

$$t_1 = 3$$

$$t_2 = 4$$

Aufgabe 5.28

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+2z}{\sqrt{1+z^2}\cdot 3}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+z^2}\cdot 3 &= 2+4z \\
18(1+z^2) &= (2+4z)^2 \\
18+18z^2 &= 4+16z+16z^2 \\
2z^2-16z+14 &= 0 \\
z^2-8z+7 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)(z-7)=0 \\
z_1 &= 1 \\
z_2 &= 7
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.29

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{-1+z}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+z^2}}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+z^2} &= 2z-2 \\
2(2+z^2) &= (2z-2)^2 \\
4+2z^2 &= 4z^2-8z+4 \\
0 &= 2z^2-8z \\
0 &= 2z(z-4) \\
z_1 &= 0 \\
z_2 &= 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.30

$$P(x,0,0),\ \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 5-x \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} &= 0 \\
(5-x)(1-x)+18-16 &= 0 \\
5-6x+x^2+3 &= 0 \\
x^2-6x+8 &= 0 \\
(x-2)(x-4) &= 0 \\
x_1 &= 2 \quad \Rightarrow \quad P_1(2,0,0) \\
x_2 &= 4 \quad \Rightarrow \quad P_1(4,0,0)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.31

$P(0, y, 0)$, $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -y \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7-y \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= 0 \\
-30 - y(7-y) + 36 &= 0 \\
y^2 - 7y + 6 &= 0 \\
(y-1)(y-6) &= 0 \\
y_1 &= 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(0,1,0) \\
y_2 &= 6 \quad \Rightarrow \quad P_2(0,6,0)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.32

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + 4\vec{b}\right) &= 0 \\
\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} &= 0 \\
2\,\vec{a} \cdot \vec{b} &= 8 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} \\
2\,\vec{a} \cdot \vec{b} &= 8\,|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 8\,|\vec{b}|^2 - (3|\vec{b}|)^2 \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= -|\vec{b}|^2
\end{aligned}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-|\vec{b}|^2}{3\,|\vec{b}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{1}{3}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109.47^\circ$$

Aufgabe 5.33

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.34

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.35

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - (-2) \cdot 0 \\ (-2) \cdot (-6) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 - 0 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.36

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.37

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.38

$$A = \left|\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}8\\8\\-4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\8\\8\end{pmatrix}\right| = 12\,\mathrm{FE}$$

Aufgabe 5.39

$$A = \left|\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\8\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-6\\3\\2\end{pmatrix}\right| = 7\,\mathrm{FE}$$

Aufgabe 5.40

$$A = \left|\begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}9\\-3\\6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 0\,\mathrm{FE}$$

Aufgabe 5.41

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}8\\-5\\9\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\3\\-5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Aufgabe 5.42

$$\frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}8\\-4\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}12\\21\\-12\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 27 = 13.5$$

Aufgabe 5.43

$$\begin{pmatrix}-6\\-6\\8\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}9\\9\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind kollinear.}$$

Aufgabe 5.44

$$\begin{pmatrix}-4\\0\\15\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\150\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind nicht kollinear.}$$

Aufgabe 5.45

eine Zahl

Aufgabe 5.46

nicht definiert

Aufgabe 5.47

eine Zahl

Aufgabe 5.48

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-6\\13\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} = 41$$

$V_{\text{Spat}} = |41| = 41$

Aufgabe 5.49

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}6\\1\\5\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\1\\5\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-4\\-10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = -15$$

$V_{\text{Spat}} = |-15| = 15$

Aufgabe 5.50

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix}-7\\1\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\34\\-25\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} = -24$$

$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$

Aufgabe 5.51

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}-5\\11\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\7\end{pmatrix} = 0$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind linear abhängig.

Aufgabe 5.52

$$\begin{aligned}
\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right| &= 213\\
\left|\left[\begin{pmatrix}2\\9\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\y\\-2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix}\right| &= 213\\
\left|\begin{pmatrix}18-y\\1\\2y-45\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix}\right| &= 213\\
|126-7y+4-6y+135| &= 213\\
|265-13y| &= 213\\
265-13y &= 213 \Rightarrow y_1 = 4\\
265-13y &= -213 \Rightarrow y_2 = 478/13
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.1

Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.2

Koordinaten von P in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} 14 &=& -1+3t & & 15 &=& 3t & & t &=& 5 \\ 11 &=& 21-2t & \Rightarrow & -10 &=& -2t & \Rightarrow & t &=& 5 \quad \Rightarrow \quad P \notin g \\ 7 &=& 12+t & & -5 &=& t & & t &=& -5 \end{array}$$

Aufgabe 6.3

Einfach den Anfangspunkt von g auswechseln:

$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.4

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.5

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.6

Richtungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.7

Mittelpunkt: $r_M = \frac{1}{2}\big(\vec{r}_A + \vec{r}_B\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(1, -4, 4)$

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.8

Schwerpunkt: $S(4, 1, 1)$

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.9

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 87 \\ 58 \\ -87 \end{pmatrix} = 29 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$h_c\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.10

- $\begin{aligned} -2 &= 2 + 2t \\ -1 &= 3 + 2t \\ 7 &= 1 - 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= -2 \\ t &= -2 \\ t &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad P \in g$

- $\begin{aligned} 8 &= 2 + 2t \\ 9 &= 3 + 2t \\ 8 &= 1 - 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= 3 \\ t &= 3 \\ t &= -7/3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad Q \notin g$

- $\begin{aligned} 4 &= 2 + 2t \\ 5 &= 3 + 2t \\ -2 &= 1 - 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= 1 \\ t &= 1 \\ t &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad R \in g$

Aufgabe 6.11

(a) g ist parallel zur x-Achse.

(b) g geht durch den Ursprung.

(c) g ist parallel zur xz-Ebene (π_3).

Aufgabe 6.12

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.13

$S_1(3, 1, 0)$, S_2 existiert nicht, $S_3(3, 0, 2)$

Aufgabe 6.14

$t_1 = \frac{3}{8} = \frac{105}{280}$
$t_2 = \frac{1}{5} = \frac{56}{280}$
$t_3 = \frac{5}{7} = \frac{200}{280}$

$t_2 < t_1 < t_3$

S_1 teilt die Strecke zwischen S_2 und S_3 im Verhältnis $49 : 95$.

Aufgabe 6.15

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind kollinear $\left(\vec{v}_h = -3\vec{v}_g\right)$
- $A_g(5, 2, -2) \in h$

Die Geraden g und h sind identisch. ($g = h$)

Aufgabe 6.16

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind kollinear $\left(\vec{v}_h = 2\vec{v}_g\right)$
- $A_g(-2|0|-2) \notin h$

Die Geraden g und h sind parallel. ($g \parallel h$)

Aufgabe 6.17

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind nicht kollinear
- Das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat genau eine Lösung: $s = -3$, $t = 2$.

Die Geraden schneiden sich

Aufgabe 6.18

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind nicht kollinear
- das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat keine Lösung.

g und h sind windschief

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$\begin{aligned} 5+2s &= 2-t \\ 5+s &= 2+t \\ 2s &= -5+t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2s+t &= -3 \\ s-t &= -3 \\ 2s-t &= -5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s &= -2 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Schnittpunkt: $S(1,3,-4)$

Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \arccos \frac{1}{3\sqrt{3}} = 78.90^\circ$$

Aufgabe 6.20

Schnittpunkt $g \cap h$:

$$\begin{aligned} -3+3s &= -16+8t \\ 5-5s &= -6+3t \\ -2+9s &= 9-t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 3s-8t &= -13 \\ -5s-3t &= -11 \\ 9s+t &= 11 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s &= 1 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Schnittpunkt: $S(0,0,7)$

spitzer Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{115} \cdot \sqrt{74}} = 90^\circ$$

Aufgabe 6.21

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_A + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_1(-1,3,0)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_A + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_2(2,1,2)$$

Aufgabe 6.22

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(-2,0,1)$$

$$d(P,g) = \left|\vec{r}_F - \vec{r}_P\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = 7$$

Aufgabe 6.23

$$\vec{v}_g \times \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix}; \; \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$d(g,h) = \frac{\left|\left(\vec{v}_g \times \vec{v}_h\right) \cdot \overrightarrow{AB}\,\right|}{\left|\vec{v}_g \times \vec{v}_h\,\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{490}{49} = 10$$

Aufgabe 6.24

Schnittpunkt: $S(5, 8, 1)$

$$w_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$w_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.25

Der Richtungsvektor $\vec{v}_h$ des Lots steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{v}_g$ und der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g aufgespannt wird:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_h = \vec{v}_g \times \left(\vec{v}_g \times \overrightarrow{AP}\right) = \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.26

Durch die Projektion auf die xy-Ebene werden alle z-Komponenten zu Null.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.27

$P(6-3t, -8+4t, 3+t) \in g$

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{QP}\right| &= 3 \\
\left|\begin{pmatrix} 6-3t \\ -8+4t \\ 3+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| &= 3 \\
\left|\begin{pmatrix} 5-3t \\ -6+4t \\ t \end{pmatrix}\right| &= 3 \\
\sqrt{(5-3t)^2 + (-6+4t)^2 + t^2} &= 3 \\
(5-3t)^2 + (-6+4t)^2 + t^2 &= 9 \\
25 - 30t + 9t^2 + 36 - 48t + 16t^2 + t^2 &= 9 \\
26t^2 - 78t + 52 &= 0 \\
t^2 - 3t + 2 &= 0 \\
(t-1)(t-2) &= 0 \\
t_1 &= 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(3, -4, 4) \\
t_2 &= 2 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 0, 5)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.28

(a) $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix}30\\20\\10\end{pmatrix}$; $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}30\\20\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$$g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-4\\-9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-4\\-9\end{pmatrix} + 15\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}39\\26\\6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(39, 26, 6)$

(c)
$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{OP}\right| &= 7\\
\left|\begin{pmatrix}-6\\-4\\-9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-6+3t\\-4+2t\\-9+t\end{pmatrix}\right| &= 7\\
\sqrt{(-6+3t)^2 + (-4+2t)^2 + (-9+t)^2} &= 7 \quad ||^2\\
36 + 16 + 81 - 36t - 16t - 18t + 9t^2 + 4t^2 + t^2 &= 49\\
133 - 70t + 14t^2 &= 49\\
14t^2 - 70t + 84 &= 0\\
t^2 - 5t + 6 &= 0\\
(t-2)(t-3) &= 0
\end{aligned}$$

nach $t = 2$ und $t = 3$ Sekunden

Aufgabe 7.1

(a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -4$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = -4$

$\varepsilon\colon x - 4 = 0$

(b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 14$

$\varepsilon\colon x - 2y + 14 = 0$

(c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -20$

$\varepsilon\colon 4x - y + z - 20 = 0$

(d) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 32 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -11$

$\varepsilon\colon 5x + 4y + 2z - 11 = 0$

Aufgabe 7.2

(a) $\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -2$

$\varepsilon\colon 2x + 2y + z - 2 = 0$

(b) $\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 47 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -47 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -50$

$\varepsilon\colon 2x - 22y - 47z - 50 = 0$

Aufgabe 7.3

(a) $\overrightarrow{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 1$

$\varepsilon \colon 3x + 4y - 5z + 1 = 0$

(b) $\overrightarrow{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -5$

$\varepsilon \colon 9\,x + 5\,y + 2\,z - 5 = 0$

Aufgabe 7.4

(a) Parallel zur xy-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 6$

$\varepsilon \colon z + 6 = 0$

(b) Parallel zur xz-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = -9$

$\varepsilon \colon y - 9 = 0$

Aufgabe 7.5

$A(2,0,1)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,2)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -7$

$3x + 2y + z - 7 = 0$

Aufgabe 7.6

(a) $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$; $d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\8\\-5\end{pmatrix} = 5$

$\varepsilon\colon x + y + 3z + 5 = 0$

(b) $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$; $d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} = -23$

$\varepsilon\colon 2x + 7y + 5z - 23 = 0$

Aufgabe 7.7

(a) Die Geraden schneiden sich offensichtlich im Punkt $S(1, 4, 8)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\17\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix} = -8$$

$\varepsilon\colon z - 8 = 0$

(b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-8\\4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad g \cap h \neq \{\,\}$$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 10$

$\varepsilon\colon 3\,x - 2\,y + z - 10 = 0$

(c) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-12\\3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix}8\\12\\-3\end{pmatrix}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}8\\12\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\-2\\-16\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad g \cap h \neq \{\,\}$$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 16$

$\varepsilon\colon 8\,x + 12\,y - 3\,z - 16 = 0$

Aufgabe 7.8

(a) $\varepsilon\colon 2y - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

zweitprojizierend (senkrecht zur yz-Ebene)

(b) $\varepsilon\colon x + y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

erstprojizierend (senkrecht zur xy-Ebene)

(c) $\varepsilon\colon 2x + 3z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

drittprojizierend (senkrecht zur xz-Ebene)

(d) $\varepsilon\colon x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zweite Hauptebene (parallel zur yz-Ebene)

(e) $z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

erste Hauptebene (parallel zur xy-Ebene)

(f) $\varepsilon\colon y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

xz-Ebene

Aufgabe 7.9

(a) $a = 3$, $b = -2$, $c = 6$

(b) $b = -4$, $c = 3$

(c) $a = -2.5$, $b = -2$, $c = 5$

(d) $a = b = c = 0$

Aufgabe 7.10

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_a = -\begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -abc$$

$$\varepsilon\colon bcx + acy + abz - abc = 0 \quad || : abc$$

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0 \quad \text{(Achsenabschnittsform)}$$

Aufgabe 7.11

Achsenabschnittsform der Ebenengleichung im Raum:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{c} - 1 = 0$$

Fehlt ein Achsenabschnitt, so kann man ihn rechnerisch mit ∞ berücksichtigen.

(a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon 3x + 3y + 2z - 6 = 0$

(b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{\infty} - \frac{z}{7} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon 7x - 3z - 21 = 0$

(c) $\frac{x}{1} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon 4x - y + 2z - 4 = 0$

(d) Bei Ebenen, die durch den Ursprung gehen, d. h. $d = 0$ gilt, ist die Achsenabschnittsform nicht definert.

Aufgabe 7.12

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{n}$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\varepsilon\colon 7x - 3y - 5z - 25 = 0$$

(b) $\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-18\\4\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}5\\18\\-4\end{pmatrix} = -\vec{n}$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -\begin{pmatrix}5\\18\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\7\\-2\end{pmatrix} = 139$$

$\varepsilon\colon 5x + 18y - 4z + 139 = 0$

Aufgabe 7.13

(a) $\varepsilon\colon 5x - 2y + z - 6 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $5s - 2t + z - 6 = 0$

Damit lassen sich x, y und z durch s und t darstellen:

$$\begin{aligned} x &= 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t \\ y &= 0 + 0 \cdot s + 1 \cdot t \\ z &= 6 - 5 \cdot s + 2 \cdot t \end{aligned}$$

und somit:

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

(b) $\varepsilon\colon 4y - z + 7 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 7 + 4t$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$$

(c) $\varepsilon\colon 2x + 4y - 6z + 1 = 0$

Setze $y = s$ und $z = t$: $x = -0.5 - 2y + 3t$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.5\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

oder setze $x = s$ und $y = t$: $z = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1/6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1/3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\2/3\end{pmatrix}$$

und mit viel Kosmetik:

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1/6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$

(d) $\varepsilon\colon 3z - 5 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 5/3$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.14

(a) $\varepsilon\colon x - 3y + 2z - 6 = 0$

x-Achsenabschnitt: $A(x, 0, 0)$: $x - 6 = 0 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

y-Achsenabschnitt: $B(0, y, 0)$: $-3y - 6 = 0 \Rightarrow B(0, -2, 0)$

z-Achsenabschnitt: $C(0, 0, z)$: $2z - 6 = 0 \Rightarrow C(0, 0, 3)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\colon s_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\colon s_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\colon s_3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\varepsilon\colon 3y + 5z - 15 = 0$

- 1. Spur ($z = 0$): $3y - 15 = 0$

  $$x = t\colon y = 5 \quad \Rightarrow \quad s_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2. Spur ($x = 0$): $-3y + 5z - 15 = 0$

  $$z = t\colon y = -5 + \tfrac{5}{3}t \quad \Rightarrow \quad s_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 3. Spur ($y = 0$): $5z - 15 = 0$

  $$x = t\colon z = 3 \quad \Rightarrow \quad s_3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.15

(a) $$\begin{aligned} 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 + 11 &= 0 \\ 15 + 4 - 30 + 11 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon \end{aligned}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$1 = -s + 4t \quad (1)$

$2 = 2s - 4t \quad (2)$

$3 = 2s - 3t \quad (3)$

aus (1) und (2) folgt $s = 3$ und $t = 1$

Einsetzen in (3) ergibt: $0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$

Aufgabe 7.16

$\varepsilon \colon 3x - 2y + z - 4 = 0$

(a) $P(0, 0, z) \in \varepsilon$:

$z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4 \quad \Rightarrow \quad P(0, 0, 4)$

(b) $P(t, t, t) \in \varepsilon$:

$3t - 2t + t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2, 2, 2)$

(c) $P(1, -5, z) \in \varepsilon$

$3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -9 \quad \Rightarrow \quad P(1, -5, -9)$

(d) $P(2, y, 4) \in \varepsilon$

$3 \cdot 2 - 2y + 4 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \quad \Rightarrow \quad P(2, 3, 4)$

Aufgabe 7.17

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{n}_2 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

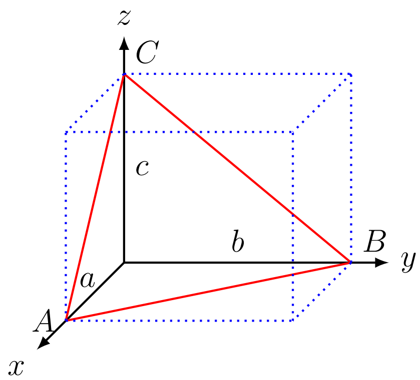
$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Punkte liegen nicht in einer Ebene.

Aufgabe 7.18

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 8 \\ x + y - 3z &= -4 \quad \Rightarrow \quad S(4,4,4) \\ 4x + 3y - 5z &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.19



Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$A(a,0,0) \quad \Rightarrow \quad a = 16$

$B(0,b,0) \quad \Rightarrow \quad b = 9$

$C(0,0,c) \quad \Rightarrow \quad c = 144/p$

Sind a, b und c die Achsenabschnitte der Ebene, so gilt:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}|abc| \\ 384 &= \frac{1}{6}\left|16 \cdot 9 \cdot \frac{144}{p}\right| \\ 384 \cdot |p| &= 8 \cdot 3 \cdot 144 \\ |p| &= 9 \\ p &= \pm 9 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.20

(a) $\varepsilon\colon 2y - z - 1 = 0$ Ebene parallel zur x-Achse

(b) $\varepsilon\colon 5x - 2y + 7z = 0$ Ebene durch den Ursprung

(c) $\varepsilon\colon y = 4 - x$ Ebene parallel zur z-Achse

(d) $\varepsilon\colon z = 3$ Ebene parallel zur xy-Ebene

Aufgabe 7.21

(a) $t_0 = 1,\ S(4, -6, 7)$

(b) $g \parallel \varepsilon$

(c) $t_0 = 4,\ S(41, 31, -40)$

(d) $g \subset \varepsilon$

Aufgabe 7.22

(a) $$\begin{aligned} 1 + 2t &= 9 - 7r + 5s \\ 1 + t &= 2 + 4r - 8s \\ 3 - t &= 6 + 6r + 2s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2t + 7r - 5s &= 8 \\ t - 4r + 8s &= 1 \\ -t - 6r - 2s &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= 5 \\ r &= -1 \\ s &= -1 \end{aligned}$$

$t = 5$ in g einsetzen: $S(11, 6, -2)$

(b) $$\begin{aligned} 5 + 6t &= 8 + 2r + 5s \\ 7 + 8t &= -4 - 4r + 5s \\ 1 + 7t &= 5 + 7r + 7s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6t - 2r - 5s &= 3 \\ 8t + 4r - 5s &= -11 \\ 7t - 7r - 7s &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$g \parallel \varepsilon$

(c) $$\begin{aligned} 1 + 6t &= 3 + 0r + 4s \\ 0 - 9t &= 5 + 3r - 5s \\ 7 + 8t &= -1 - 4r + 4s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6t + 0r - 4s &= 2 \\ -9t - 3r + 5s &= 5 \\ 8t + 4r - 4s &= -8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{unendliche viele Lösungen}$$

$g \subset \varepsilon$

Aufgabe 7.23

(a) $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 5z + 5 &= 0 \\ 6x + 4y + 9z - 7 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P(-11, 7, 5) \\ x + 3y - 2z + 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x + y + 3 &= 0 \\ 5x + 8y + 3z - 3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P(-4, 1, 5) \\ x - y + z + 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.24

(a) $2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -4$

$\delta\colon 2x - 3y + 5z - 4 = 0;$

(b) $7 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) - 8 \cdot 4 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 15$

$\delta\colon 7x + 2y - 8z + 15 = 0;$

Aufgabe 7.25

(a) $\vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 9 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 1$

$\delta\colon x + 3y - z + 1 = 0$

(b) $2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -3$

$\delta\colon 2x - y - 3 = 0$

Aufgabe 7.26

(a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$

$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -32$

$\mu\colon 2x - 6y + 3z - 32 = 0$

(b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$

$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -11$

$\mu\colon 7y - z - 11 = 0$

Aufgabe 7.27

(a) $M_{AB} = (1, 3, -3)$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -17$

$\mu\colon 2x + y - 4z - 17 = 0$ (Mittelnormalebene)

$$\begin{aligned} \mu \cap g\colon 2(3+t) + (-2-t) - 4(2+2t) - 17 &= 0 \\ -21 - 7t &= 0 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

$P(0, 1, -4)$

(b) $M_{AB} = (1, 4, 1)$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{n}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$

$\mu\colon 2x - y - 2z + 4 = 0$

$$\begin{aligned} \mu \cap g\colon 2(-1-t) - (4+2t) - 2(5+t) + 4 &= 0 \\ -12 - 6t &= 0 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

$P(-2, -16, -10)$

Aufgabe 7.28

(a) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$

$d_\delta = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = -\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -(-3 + 12) = -9$

$\delta\colon 3x - 4y - 10z + 9 = 0$

Aufgabe 7.28

(b) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-5\\-4\\1\end{pmatrix};\ \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}$

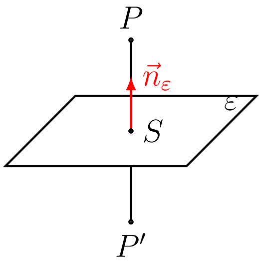
$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix}-5\\-4\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-29\\38\\7\end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$d_\delta = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = -\begin{pmatrix}-29\\38\\7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = 51$$

$\delta\colon 29x - 38y - 7z - 51 = 0$

Aufgabe 7.29

Lösungsidee: Lege eine zu ε normale Gerade durch P, schneide sie mit ε und verdopple den Wert des Parameters t, um direkt vom Punkt P zum Punkt P' zu gelangen.



(a) $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g \cap \varepsilon\colon 4(0+4t) - 3(4-3t) + (-5+t) + 4 = 0$$
$$26t - 13 = 0$$
$$t = 0.5$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P'(4, 1, -4)$$

(b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$g \cap \varepsilon\colon 1 \cdot (4+t) - 2 \cdot (-2t) + 3 \cdot (-2+3t) - 5 = 0$$
$$-7 + 14t = 0$$
$$t = 0.5$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P'(5, -2, 1)$$

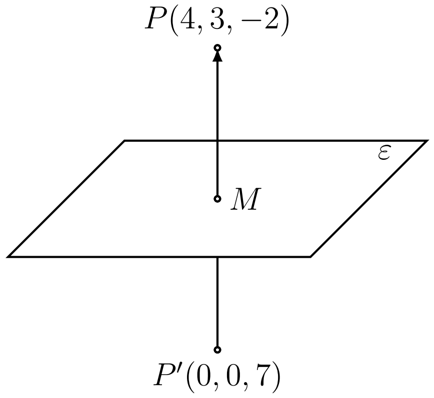
(c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$; $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$g \cap \varepsilon\colon 3 \cdot (-1+3t) - 8 \cdot (17-8t) - 7 = 0$$
$$-146 + 73t = 0$$
$$t = 2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P'(11, -6, -15)$$

Aufgabe 7.30

Lösungsidee: Wenn P und P' Spiegelpunkte sind, so ist die Spiegelebene gerade die Mittelnormalebene.



$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon\colon 4x + 3y - 9z + d = 0$

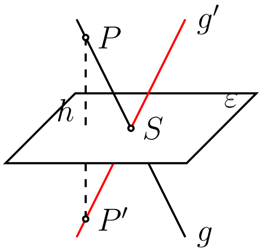
Mittelpunkt der Strecke PP': $M(2, 1.5, 2.5) \in \varepsilon$

$$d_\varepsilon = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = -(8 + 4.5 - 22.5) = 10$$

$\varepsilon\colon 4x + 3y - 9z + 10 = 0$

Aufgabe 7.31

Lösungsidee: Wähle einen Punkt $P \in g$ mit $P \notin \varepsilon$ und spiegle ihn an der Ebene ε. Die Gerade g' durch den Spiegelpunkt P' und den Schnittpunkt $g \cap \varepsilon = S$ ist die gesuchte gespiegelte Gerade g'.



(a) $P(7,-2,4) \in g \quad \Rightarrow \quad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} h \cap \varepsilon\colon 4(7+4t) + 2(-2+2t) - (4-t) + 1 &= 0 \\ 21 + 21t &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

$t' = -2$ in h einsetzen: $P'(-1,-6,6)$

$$\begin{aligned} g \cap \varepsilon\colon 4(7+2t) + 2(-2) - (4+t) + 1 &= 0 \\ 7t + 21 &= 0 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad S(1,-2,1)$

$$\overrightarrow{SP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g'\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(b) $P(-1,-1,1) \in g \quad \Rightarrow \quad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} h \cap \varepsilon\colon (-1-3t) - 3(-1+4t) - 2(1+3t) + 42 &= 0 \\ 42 + 14t &= 0 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

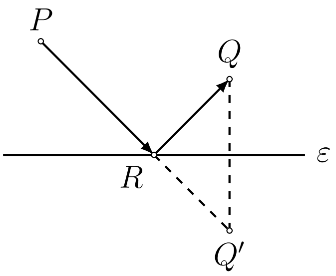
$t' = -6$ in h einsetzen: $P'(-7,17,13)$

$$\begin{aligned} g \cap \varepsilon\colon (-1-3t) - 3(-2) - 2(1+3t) + 42 &= 0 \\ 42 - 21t &= 0 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad S(-7,7,7)$

$$\overrightarrow{SP'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g'\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.32



- Q an ε spiegeln $\to Q'$
- $(PQ') \cap \varepsilon \to R$

oder (nicht eingezeichnet):

- P an ε spiegeln $\to P'$
- $(P'Q) \cap \varepsilon \to R$

$$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon\colon 5(7+5t) - 2(-1-2t) + 3(8+3t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

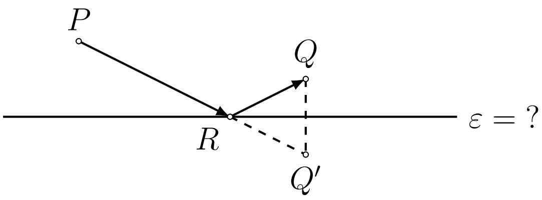
$t' = 2 \cdot (-1)$ in h einsetzen: $\quad \Rightarrow \quad Q'(-3, 3, 2)$

$$g(PQ')\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon\colon 5(7-5t) - 2(-7+5t) + 3(4-t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

$R(2, -2, 3)$

Aufgabe 7.33



- Q' bestimmen.
- ε ist die Mittelnormalebene von Q und Q'.

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{PR}|} \cdot \overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{PR}|} \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2\sqrt{38}}{3\sqrt{38}} \cdot (-3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q'(-1, -3, 14)$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4\vec{n}$$

$M_{QQ'}(1, 5, 8)$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 3$$

$\varepsilon\colon x + 4y - 3z + 3 = 0$

Aufgabe 7.34

(a) $\vec{n}_\varepsilon = (5,-1,-6)^{\mathrm{T}}$, $\vec{n}_\delta = (4,0,1)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}
\sphericalangle\big(\varepsilon,\delta\big) &= \sphericalangle\big(\vec{n}_\varepsilon,\vec{n}_\delta\big)\\
&= \arccos\frac{\left|\vec{n}_\varepsilon\cdot\vec{n}_\delta\right|}{\left|\vec{n}_\varepsilon\right|\cdot\left|\vec{n}_\delta\right|}\\
&= \arccos\frac{|5\cdot 4+(-1)\cdot 0+(-6)\cdot 1|}{\sqrt{5^2+1^2+6^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+1^2}}\\
&= \arccos\frac{14}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{17}} = 64.45^\circ
\end{aligned}$$

(b) $\vec{n}_\varepsilon = (3,-2,5)^{\mathrm{T}}$

Einen Normalenvektor von δ erhält man über das Kreuzprodukt des Richtungsvektors $\vec{v}$ von g und einem weiteren Richtungsvektor dieser Ebene, nämlich dem Vektor zwischen dem Punkt P und dem Punkt $A(2,2,1)$ der Geraden g.

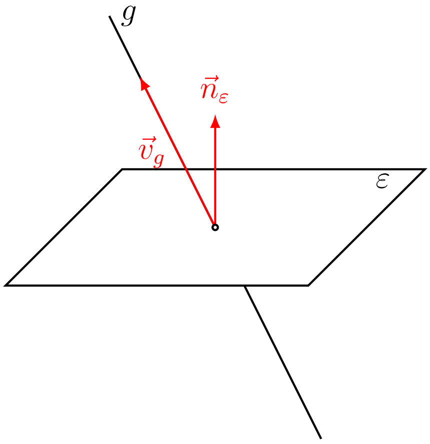
$$\vec{v}\times\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-13\\-14\end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$\begin{aligned}
\sphericalangle\big(\varepsilon,\delta\big) = \sphericalangle\big(\vec{n}_\varepsilon,\vec{n}_\delta\big) &= \arccos\frac{\left|\vec{n}_\varepsilon\cdot\vec{n}_\delta\right|}{\left|\vec{n}_\varepsilon\right|\cdot\left|\vec{n}_\delta\right|}\\
&= \arccos\frac{35}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{374}} = 72.93^\circ
\end{aligned}$$

(c) $\sphericalangle(\varepsilon,\delta) = \cdots = 48.00^\circ$

Aufgabe 7.35

Lösungsidee: Berechne den spitzen Schnittwinkel φ' zwischen einem Richtungsvektor $\vec{v}_g$ der Geraden g und einem Normalenvektor $\vec{n}_\varepsilon$ der Ebene ε und ergänze diesen Winkel auf 90°.



(a) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = (2, 1, -2)^{\mathrm{T}}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = (3, -4, 0)^{\mathrm{T}}$

$$\varphi' = \arccos \frac{\left|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon\right|}{\left|\vec{v}_g\right| \cdot \left|\vec{n}_\varepsilon\right|} = \arccos \frac{|6 - 4 + 0|}{\sqrt{4 + 1 + 4}\sqrt{9 + 16}}$$

$$= \arccos \frac{2}{15} = 82.34°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 90° - 82.34° = 7.66°$$

oder direkt: $\sphericalangle\big(g, \varepsilon\big) = \arcsin \frac{2}{15} = 7.66°$

(b) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi' = \arccos \frac{\left|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon\right|}{\left|\vec{v}_g\right| \cdot \left|\vec{n}_\varepsilon\right|} = \arccos \frac{|6 - 5 - 1|}{\sqrt{9 + 1 + 1}\sqrt{4 + 25 + 1}}$$

$$= \arccos \frac{0}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{30}} = 90°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 90° - 90° = 0°$$

geometrische Deutung: $g \parallel \varepsilon$

Aufgabe 7.36

Normalenvektor der xy-Ebene: $\vec{n}_1 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$

Normalenvektor von ε: $\vec{n}_\varepsilon = (4,0,c)^{\mathrm{T}}$

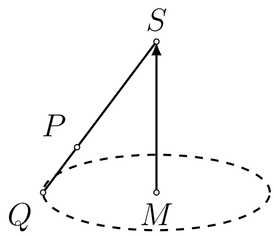
$$\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_\varepsilon}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} = \cos 45^\circ$$

$$\frac{c}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{16 + c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} 2c &= \sqrt{2}\sqrt{16+c^2} \\ 4c^2 &= 2(16+c^2) \\ 2c^2 &= 16 + c^2 \\ c^2 &= 16 \\ c &= \pm 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.37

Da bei einem *geraden* Kreiskegel die Kegelachse *senkrecht* auf der Grundkreisebene steht, ist der Vektor $\overrightarrow{MS}$ ein Normalenvektor der Grundkreisebene.



$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = 5 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon 10x + 2y - 11z + 5 = 0$

$g(SP) \cap \varepsilon \to Q$:

$$\overrightarrow{SP} = \cdots = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$g \cap \varepsilon$: $10(-7+4t) + 2(-3+t) - 11(14-3t) + 5 = 0$

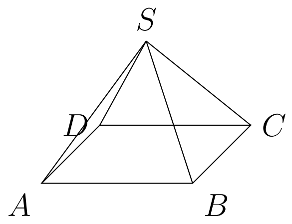
$-225 + 75t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3 \quad \Rightarrow \quad Q(5,0,5)$

Kegelradius: $r = |\overrightarrow{MQ}| = \cdots = 3$

Kegelhöhe: $h = |\overrightarrow{MS}| = \cdots = 15$

Kegelvolumen: $\frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h = 45\pi$

Aufgabe 7.38



(a) $\overrightarrow{AB} = (-6, -3, -6)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{BC} = (6, y+1, z+5)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}| &= |\overrightarrow{BC}| \\
\sqrt{36+9+36} &= \sqrt{36+(y+1)^2+(z+5)^2} \\
81 &= 36 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 10z + 25 \\
0 &= y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$-36 - 3y - 3 - 6z - 30 = 0$$

$$y = -2z - 23 \quad (2)$$

(2) in (1) einsetzen:

$$\begin{aligned}
y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 &= 0 \\
(-2z-23)^2 + 2(-2z-23) + z^2 + 10z - 19 &= 0 \\
4z^2 + 92z + 529 - 4z - 46 + z^2 + 10z + 53 &= 0 \\
5z^2 + 98z + 464 &= 0
\end{aligned}$$

$z_1 = -8 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -7 \quad \Rightarrow \quad C_1(3, -7, -8)$

$z_2 = -11.6 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0.2 \quad \Rightarrow$ nicht ganzzahlig

(b) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{G} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3 \cdot 324}{9 \cdot 9} = 12$

$$\vec{r}_M = \tfrac{1}{2}\big(\vec{r}_A + \vec{r}_C\big) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -54 \\ 54 \end{pmatrix}; \; \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{S_1} = \vec{r}_M + 12 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} + 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5.5 \\ -11.5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad S_1(7, 5.5, -11.5)$

$$\vec{r}_{S_1} = \vec{r}_M + 12 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad S_2(-1, -10.5, 4.5)$

Aufgabe 7.39

(a) $d(P,\varepsilon) = \dfrac{|4 \cdot 3 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \dfrac{45}{9} = 5$

(b) $d(P,\varepsilon) = \dfrac{|6 \cdot 7 - 9 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 7|}{\sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2}} = \dfrac{77}{11} = 7$

(c) $d(P,\varepsilon) = \dfrac{|15 \cdot (-4) + 8 \cdot 0 - 8|}{\sqrt{15^2 + 8^2 + 0^2}} = \dfrac{68}{17} = 4$

Aufgabe 7.40

- Gleichung der Ebene durch BCD:

  $$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  $$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

  $$d = -\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon 2x + 2y + z - 6 = 0$$

  Höhe der Pyramide = Abstand des Punktes A von ε:

  $$h = d(A,\varepsilon) \overset{\text{HNF}}{=} \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{3} = 2$$

- Seitenkante $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $$\sphericalangle\big(\overrightarrow{AC}, \vec{n}\big) = \arccos \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{5} \cdot 3} = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = 26.57^\circ$$

  $$\sphericalangle\big(\overrightarrow{AC}, BCD\big) = 90^\circ - 26.57^\circ = 63.43^\circ$$

Aufgabe 7.41

Wird eine Ebene $\varepsilon\colon ax + by + cz + d = 0$ um h Einheiten parallel entlang ihres Normalenvektors verschoben, so bedeutet dies für die HNF der verschobenen Ebene δ und einen beliebigen Punkt P:

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(P, \delta) &= \operatorname{dist}(P, \varepsilon) \pm h \\
&= \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \pm h \\
&= \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \pm \frac{h\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{ax + by + cz + d \pm h\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
\end{aligned}$$

Also muss $\pm h\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ zur Ebenengleichung von ε addiert werden, um die Ebenengleichung von δ zu erhalten.

(a) $\varepsilon\colon 11x - 2y + 10z - 15 = 0$, $d = 3$

$3\sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = 3 \cdot \sqrt{225} = 3 \cdot 15 = 45$

$\delta_1\colon 11x - 2y + 10z + 30 = 0$
$\delta_2\colon 11x - 2y + 10z - 6 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 24x - 7z + 5 = 0$, $d = 4$

$4\sqrt{24^2 + 0^2 + 7^2} = 4 \cdot \sqrt{625} = 4 \cdot 25 = 100$

$\delta_1\colon 24x - 7z + 105 = 0$
$\delta_2\colon 24x - 7z - 95 = 0$

(c) $\varepsilon\colon 9x + 12y + 8z - 6 = 0$, $d = 2$

$2\sqrt{9^2 + 12^2 + 8^2} = 2 \cdot \sqrt{289} = 2 \cdot 17 = 34$

$\delta_1\colon 9x + 12y + 8z + 28 = 0$
$\delta_2\colon 9x + 12y + 8z - 40 = 0$

Aufgabe 7.42

(a)
$$\frac{|4x-2y-4z+3|}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{|x+2y-2z+5|}{\sqrt{1+4+4}}$$
$$\frac{|4x-2y-4z+3|}{6} = \frac{|x+2y-2z+5|}{3} \qquad || \cdot 6$$
$$|4x-2y-4z+3| = |2x+4y-4z+10|$$

$$4x-2y-4z+3 = 2x+4y-4z+10$$
$$\omega_1\colon 2x-6y-7=0$$

$$4x-2y-4z+3 = -(2x+4y-4z+10)$$
$$\omega_2\colon 6x+2y-8z+13=0$$

(b)
$$\frac{|6x+6y+17z-2|}{\sqrt{36+36+289}} = \frac{|15x-10y-6z+9|}{\sqrt{225+100+36}}$$
$$\frac{|6x+6y+17z-2|}{19} = \frac{|15x-10y-6z+9|}{19} \qquad || \cdot 19$$
$$|6x+6y+17z-2| = |15x-10y-6z+9|$$

$$6x+6y+17z-2 = 15x-10y-6z+9$$
$$\omega_1\colon 9x-16y-23z+11=0$$

$$6x+6y+17z-2 = -(15x-10y-6z+9)$$
$$\omega_2\colon 21x-4y+11z+7=0$$

(c) $\omega_1\colon 10x-23y+11z-35=0$
$\omega_2\colon 10x+y-7z+13=0$

(d) $\omega_1\colon x+110y+11z+20=0$
$\omega_2\colon 55x+2y-25z-160=0$

Aufgabe 7.43

(a) $$\frac{|3x-4y+2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|4x+3z+7|}{\sqrt{16+9}}$$

$$\frac{|3x-4y+2|}{5} = \frac{|4x+3z+7|}{5} \qquad || \cdot 5$$

$$|3x-4y+2| = |4x+3z+7|$$

$$3x-4y+2 = \pm(4x+3z+7)$$

$\omega_1\colon x+4y+3z+5=0$

$\omega_2\colon 7x-4y+3z+9=0$

$g \cap \omega_1 = \{P_1\}$:

$$\begin{aligned} 1(0+t)+4(1-t)+3(2+0)+5 &= 0 \\ t+4-4t+6+5 &= 0 \\ -3t+15 &= 0 \\ t &= 5 \\ P_1 &= (5,-4,2) \end{aligned}$$

$g \cap \omega_2 = \{P_2\}$:

$$\begin{aligned} 7(0+t)-4(1-t)+3(2+0)+9 &= 0 \\ 7t-4+4t+6+9 &= 0 \\ 11t+11 &= 0 \\ t &= -1 \\ P_2 &= (-1,2,2) \end{aligned}$$

(b) $\dfrac{|14x-7y-22z+38|}{\sqrt{196+49+484}} = \dfrac{|4x+7y-4z+2|}{\sqrt{16+49+16}}$

$$\frac{|14x-7y-22z+38|}{27} = \frac{|4x+7y-4z+2|}{9} \qquad || \cdot 27$$

$$|14x-7y-22z+38| = |12x+21y-12z+6|$$

$$14x-7y-22z+38 = \pm(12x+21y-12z+6)$$

$\omega_1\colon 2x-28y-10z+32=0$

$\omega_2\colon 26x+14y-34z+44=0$

$g \cap \omega_1 = \{P_1\}$:

$$\begin{aligned} 2(6+3t)-28(3+2t)-10(2-2t)+32 &= 0 \\ -30t-60 &= 0 \\ t &= -2 \\ P_1 &= (0,-1,6) \end{aligned}$$

$g \cap \omega_2 = \{P_2\}$:

$$\begin{aligned} 26(6+3t)+14(3+2t)-34(2-2t)+44 &= 0 \\ 174t+174 &= 0 \\ t &= -1 \\ P_2 &= (3,1,4) \end{aligned}$$

Aufgabe 7.44

$\varepsilon\colon x-12y+12z+7=0$?

(a) $d = \dfrac{3-12\cdot 3+12\cdot 5+7}{\sqrt{1+144+144}} = \dfrac{34}{17} = 2$

(b) $\pi_1\colon z=0$

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(Q,\varepsilon) &= \operatorname{dist}(Q,\pi_1) \\ \frac{x-12\cdot 1+12\cdot 1+7}{17} &= \pm\frac{1}{\sqrt{0^2+0^2+1}} \\ x+7 &= \pm 17 \\ x_1 &= 10 \\ x_2 &= 24 \end{aligned}$$

Aufgabe 8.1

(a) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$

(b) $(x-3)^2+y^2+(z+2)^2=5$

Aufgabe 8.2

(a) $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=5^2$

Kugel mit Mittelpunkt $M(0,0,0)$ und Radius $\varrho=5$

(b)
$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z&=-12\\ (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-4)^2-16&=-12\\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2&=9=3^2 \end{aligned}$$

Kugel mit Mittelpunkt $M(1,-2,4)$ und Radius $\varrho=3$

(c) $x^2+y^2-z^2+6x-2y+4z=25$

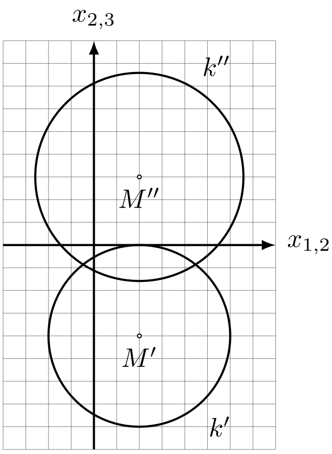
keine Kugel (wegen $-z^2$)

(d)
$$\begin{aligned} 3x^2+3y^2+3z^2+x+y+z&=1\\ x^2+y^2+z^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z&=\frac{1}{3}\\ \left(x^2+\frac{1}{6}\right)^2+\left(y^2+\frac{1}{6}\right)^2+\left(z^2+\frac{1}{6}\right)^2&=\frac{12}{36}+\frac{3}{36}\\ \left(x^2+\frac{1}{6}\right)^2+\left(y^2+\frac{1}{6}\right)^2+\left(z^2+\frac{1}{6}\right)^2&=\frac{15}{36}=\frac{5}{12} \end{aligned}$$

Kugel mit Mittelpunkt $M(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{6})$ und Radius $\varrho=\sqrt{\frac{5}{12}}$

Aufgabe 8.3

Darstellung der Kugel in der DG-Zweitafelprojektion:

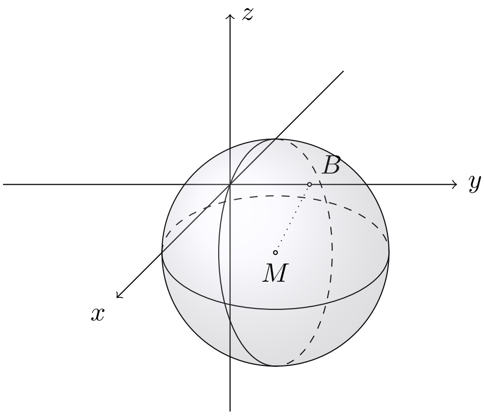


In der Grundrissebene gilt $z = 0$.

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 + (0-3)^2 = 25$$
$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Kreis in π_1 mit $M(4,2,0)$ und $\varrho = 4$

Aufgabe 8.4



$$\overrightarrow{MB} = \vec{r}_B - \vec{r}_M = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix}$$

$$\varrho^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix} = 9 + 36 + 16 = 61$$

$K\colon (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 61$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$g_x\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K \cap g_x\colon (x-3)^2 + (0-1)^2 + (0+4)^2 &= 61 \\ (x-3)^2 + 1 + 16 &= 61 \\ (x-3)^2 &= 44 \\ x - 3 &= \pm\sqrt{44} \\ x_1 &= 3 + \sqrt{44} \\ x_2 &= 3 - \sqrt{44} \end{aligned}$$

$A_1(3+\sqrt{44}, 0, 0)$, $A_2(3-\sqrt{44}, 0, 0)$

Schnittpunkte mit der y-Achse:

$$g_y\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
K \cap g_y\colon (0-3)^2 + (y-1)^2 + (0+4)^2 &= 61\\
9 + (y-1)^2 + 16 &= 61\\
(y-1)^2 &= 36\\
y-1 &= \pm 6\\
y_1 &= 1+6 = 7\\
y_2 &= 1-6 = -5
\end{aligned}
$$

$B_1(0,7,0),\ B_2(0,-5,0)$

Schnittpunkte mit der z-Achse:

$$g_z:\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
K \cap g_y\colon (0-3)^2 + (0-1)^2 + (z+4)^2 &= 61\\
9 + 1 + (z+4)^2 &= 61\\
(z+4)^2 &= 51\\
z+4 &= \pm\sqrt{51}\\
z_1 &= -4+\sqrt{51}\\
z_2 &= -4-\sqrt{51}
\end{aligned}
$$

$C_1(0,0,-4+\sqrt{51}),\ C_2(0,0,-4-\sqrt{51})$

Aufgabe 8.5

(a) $$
\begin{aligned}
([-4+t]-1)^2 + ([4-t]-2)^2 + ([3-2t]+1)^2 &= 9\\
(t-5)^2 + (-t+2)^2 + (-2t+4)^2 &= 9\\
6t^2 - 30t + 45 &= 9\\
6t^2 - 30t + 36 &= 0\\
t^2 - 5t + 6 &= 0\\
(t-2)(t-3) &= 0\\
t_1 &= 2\\
t_2 &= 3
\end{aligned}
$$

$P_1(-2,2-1),\ P_2(-1,1,-3)$

Aufgabe 8.5

(b) $$
\begin{aligned}
(8+0)^2 + (0+t)^2 + (5-2t)^2 &= 49\\
64 + t^2 + 25 - 20t + 4t^2 &= 49\\
5t^2 - 20t + 40 &= 0\\
t^2 - 4t + 8 &= 0\\
D &= -16 < 0 \quad \text{keine Lösung}
\end{aligned}
$$

Die Gerade meidet die Kugel.

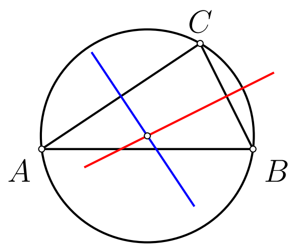
Aufgabe 8.5

(c) $$\begin{aligned} ([4+t]-4)^2+([8+2t]-5)^2+([7+2t]-1)^2 &= 9\\ t^2+(2t+3)^2+(2t+6)^2 &= 9\\ 9t^2+36t+45 &= 9\\ 9t^2+36t+36 &= 0\\ t^2+4t+4 &= 0\\ (t+2)^2 &= 0\\ t &= -2 \end{aligned}$$

Berührpunkt: $P(2, 4, 3)$

Aufgabe 8.6

Die Lösung erfolgt analog zur Bestimmung des Umkreismittelpunkts im Dreieck: Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke hat denselben Abstand von den beiden Endpunkten. Somit hat der Schnittpunkt von zwei (der drei) Mittelsenkrechten im Dreieck den gleichen Abstand von allen drei Ecken.



Beim Tetraeder gibt es vier Kanten, wobei drei Mittelnormalebenen genügen, um ihren Schnittpunkt zu bestimmen.

Bestimme drei Mittelnormalebenen und schneide sie:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2\\ -4\\ -4 \end{pmatrix},\ M_{AB}(6, 3, -1);\ \mu_{AB}\colon 2x-4y-4z-4=0$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3\\ 2\\ 1 \end{pmatrix},\ M_{AC}(3.5, 6, 1.5);\ \mu_{AC}\colon -3x+2y+z-3=0$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5\\ -4\\ 7 \end{pmatrix},\ M_{AD}(2.5, 3, 4.5);\ \mu_{AD}\colon -5x-4y+7z-7=0$$

$\mu_{AB} \cap \mu_{AC} \cap \mu_{AD}$:

$$\begin{aligned} 2x-4y-4z &= 4\\ -3x+2y+z &= 3 \quad\Rightarrow\quad S(-2,-1,-1)\\ -5x-4y+7z &= 7 \end{aligned}$$

Aufgabe 8.7

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = 49 + 16 + 16 = 81 = \varrho^2$ (ok)

$$\vec{n} = \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = -76$$

$\tau\colon 7x + 4y - 4z - 76 = 0$

Aufgabe 8.8

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührpunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} K\colon x^2 + y^2 + z^2 &= 3^2 \quad (1) \\ (x, y, z)^T(0, 0, 1)^T &= 0 \quad (2) \\ (x, y, z)^T(10, 0, 0)^T &= 3^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Aus (2) folgt $z = 0$

Aus (3) folgt $10x = 9$ und $x = 9/10$

Einsetzen in (1):

$$\frac{81}{100} + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = \frac{900 - 81}{100} = \frac{9}{100} \cdot 91 \Rightarrow y \quad = \pm\frac{3}{10}\sqrt{91}$$

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 3/10 \cdot \sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ \pm\sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}\vec{n}$$

$d = -\vec{r}_B \cdot \vec{r}_A = -30$

$3x \pm \sqrt{91}\, y - 30 = 0$

Aufgabe 8.9

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührpunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} K\colon x^2+y^2+z^2 &= 3^2 \quad (1)\\ (x,y,z)^T(2,3,-10)^T &= 0 \quad (2)\\ (x,y,z)^T(3,4,-5)^T &= 3^2 \quad (3) \end{aligned}$$

$2x + 3y - 10z = 0 \quad (2)$

$3x + 4y - 5z = 9 \quad (3)$

$(3) - (2)$: $x + y + 5z = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 9 - y - 5z \quad (4)$

x aus (2) und (3) eliminieren: $y = 20z - 18 \quad (5)$
(5) in (4) einsetzen: $x = 9 - (20z - 18) - 5z = 27 - 25z \quad (6)$

(5), (6) in (1) einsetzen:

$$\begin{aligned} (27-25z)^2 + (20z-18)^2 + z^2 &= 9\\ 1026z^2 - 2070z + 1044 &= 0\\ z_1 &= 1\\ z_2 &= 58/57 \end{aligned}$$

z_1, z_2 in (5) und (6) einsetzen:

$y_1 = 20z_1 - 18 = 2$
$y_2 = 20z_2 - 18 = 134/57$

$x_1 = 27 - 25z_1 = 2$
$x_2 = 27 - 25z_2 = 89/57$
$\vec{n}_1 = (2,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\vec{n}_2 = (89,134,58)^{\mathrm{T}}$

$A(3,4,-5) \in \tau_{1,2}$:

$d_1 = -\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_A = -9$
$d_2 = -\vec{n}_2 \cdot \vec{r}_A = -513$

$\tau_1\colon 2x + 2y + z - 9 = 0$
$\tau_2\colon 89x + 134y + 58z - 513 = 0$

Aufgabe 8.10

Richtungsvektoren von g = Normalenvektoren von τ

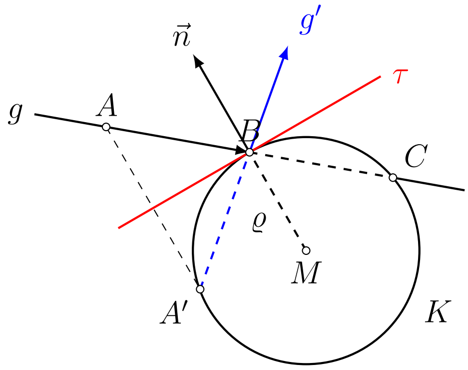
Schnittpunkte von K mit h: $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 25\\ 9t^2+4t^2+t^2 &= 25\\ 14t^2 &= 25 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 5/\sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\text{Berührpunkte: } \vec{r}_B = \pm\frac{5}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_{1,2} = -\vec{n}\cdot\vec{r}_B = \pm 5\sqrt{14}$$

$\tau_1\colon\ 3x + 2y + z + 5\sqrt{14} = 0$
$\tau_2\colon\ 3x + 2y + z - 5\sqrt{14} = 0$

Aufgabe 8.11



$K\colon\ (x-8)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 50$

$g \cap K\colon\ [x = -3 + t,\ y = -2,\ z = -4 + t]$

$$\begin{aligned}
(-3+t-8)^2 + (-2-3)^2 + (-4+t-2)^2 &= 50\\
(t-11)^2 + (-5)^2 + (t-6)^2 &= 50\\
t^2 - 22t + 121 + 25 + t^2 - 12t + 36 &= 50\\
2t^2 - 34t + 132 &= 0\\
t^2 - 17t + 66 &= 0\\
(t-6)(t-11) &= 0\\
t_1 &= 6\\
t_2 &= 11
\end{aligned}$$

$B(3, -2, 2)$ (der zweite Schnittpunkt C ist weiter entfernt)

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-5\\0\end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -5\vec{n}$$

$$d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_B = -\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} = -1$$

$\tau\colon\ x + y - 1 = 0$

$A(-3, -2, -4)$ an τ spiegeln:

$$\ell\colon\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(-3+t)+(-2+t)-1&=0\\ -3+t-2+t-1&=0\\ 2t-6&=0\\ t_0&=3\end{aligned}$$

$$\vec{r}_{A'}=\vec{r}_A+2\cdot t_0\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\-4\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-4\end{pmatrix}$$

$A'(3,4,-4)$

$$\overrightarrow{A'B}=\vec{r}_B-\vec{r}_{A'}=\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Geradengleichung des reflektierten Lichtstrahls:

$$g'\colon\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.12

$K_1\colon (x-1)^2+(y-13)^2+(z-18)^2=49$
$K_2\colon (x+1)^2+(y-13)^2+(z-14)^2=9$

$K_1\colon x^2-2x+1+y^2-26y+169+z^2-36z+324-49=0$
$K_2\colon x^2+2x+1+y^2-26y+169+z^2-28z+196-9=0$

$$\begin{aligned}K_1-K_2\colon\ -4x-8z+88&=0\quad ||:-4\\ \varepsilon\colon x+2z-22&=0\end{aligned}$$

$$g\colon\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\13\\18\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon\cap g\colon (1+t)+2(18+2t)-22&=0\\ 5t+15&=0\\ t&=-3\end{aligned}$$

Mittelpunkt des Schnittkreises: $M(-2,13,12)$

$$d_1=\overline{M_1M}=\left|\begin{pmatrix}-2\\13\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\13\\18\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\0\\-6\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

Radius des Schnittkreises: $r=\sqrt{\varrho_1^2-d_1^2}=\sqrt{49-45}=\sqrt{4}=2$