Vektorgeometrie

Übungen

Kollegium St. Fidelis
W. Gehrig
Version vom 20. August 2019

Aufgabe 1.1

Was ist ein Vektor?

Aufgabe 1.2

Wahr oder falsch?
$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ sind Repräsentanten des gleichen Vektors.

Aufgabe 1.3

Wahr oder falsch?

Zu einem Vektor $\vec{a}$ gibt es unendlich viele Repräsentanten mit dem Anfangspunkt P.

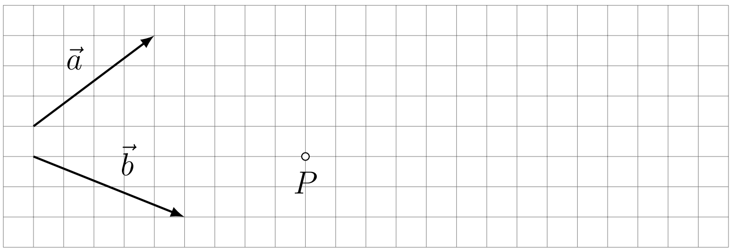
Aufgabe 1.4

Wahr oder falsch?

Verbindet man die Anfangspunkte und die Endpunkte zweier Repräsentanten desselben Vektors miteinander, so erhält man ein Parallelogramm.

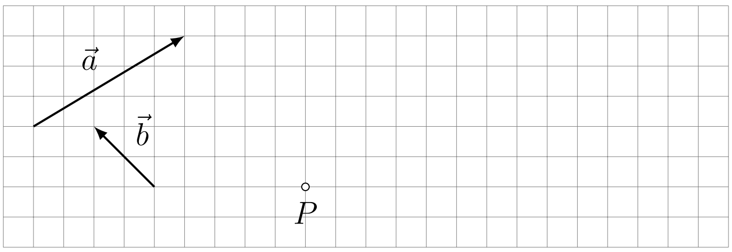
Aufgabe 1.5

Konstruiere aus den Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ mit dem Anfangspunkt P.



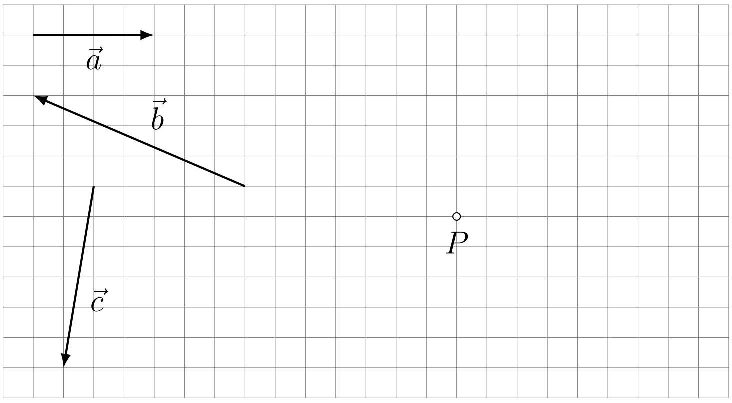
Aufgabe 1.6

Konstruiere aus den Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ mit dem Anfangspunkt P.



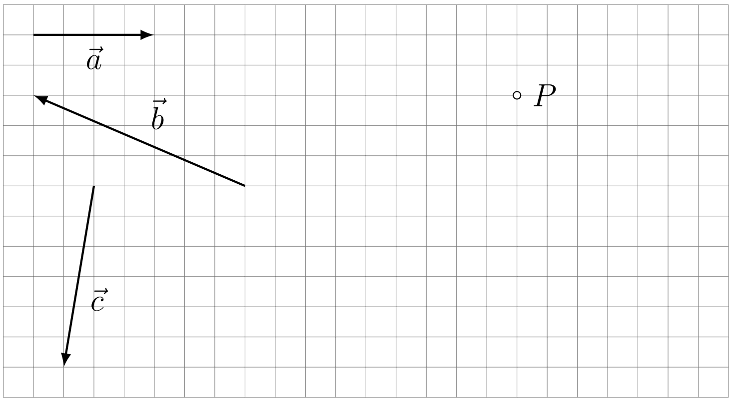
Aufgabe 1.7

Konstruiere aus den Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ den Repräsentanten von $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mit dem Anfangspunkt P.



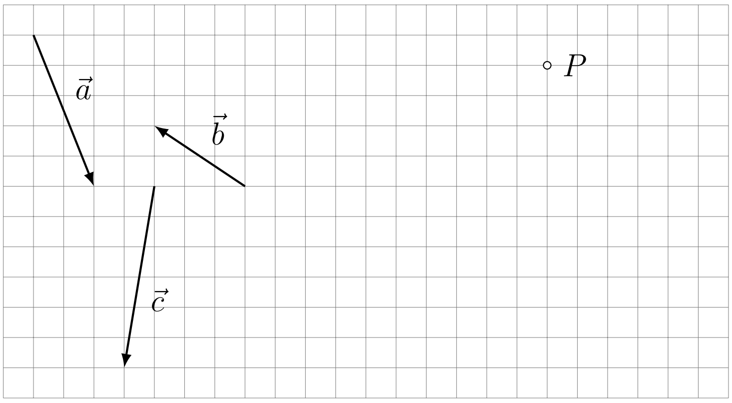
Aufgabe 1.8

Konstruiere aus den Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ den Repräsentanten von $\vec{d} = \vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$ mit dem Anfangspunkt P.



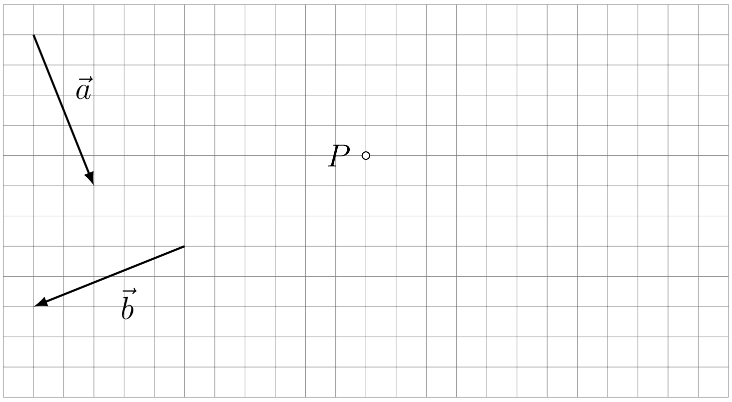
Aufgabe 1.9

Konstruiere aus den Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ den Repräsentanten von $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{b}$ mit dem Anfangspunkt P.



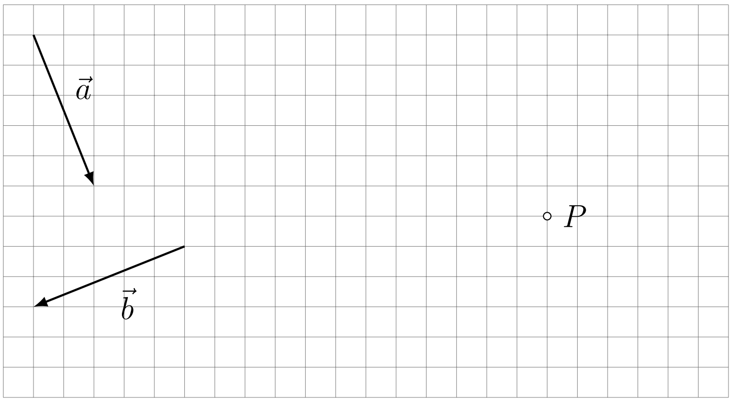
Aufgabe 1.10

Konstruiere aus den Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ mit dem Anfangspunkt P.



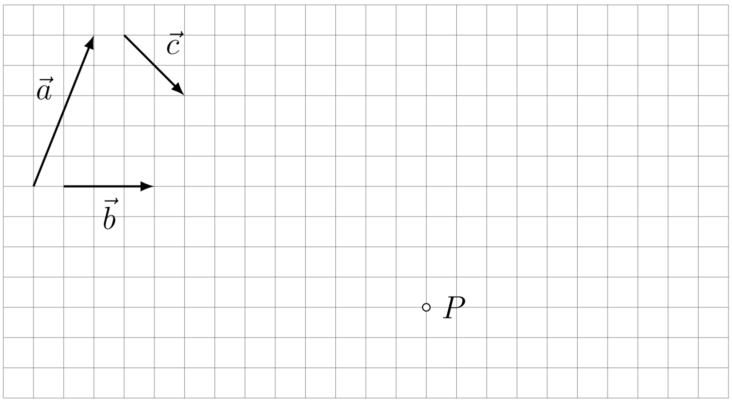
Aufgabe 1.11

Konstruiere aus den Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ mit dem Anfangspunkt P.



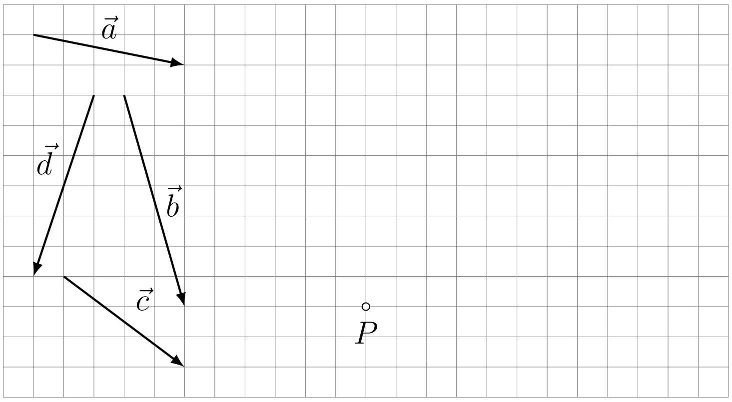
Aufgabe 1.12

Konstruiere aus den Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ den Repräsentanten von $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ mit dem Anfangspunkt P.



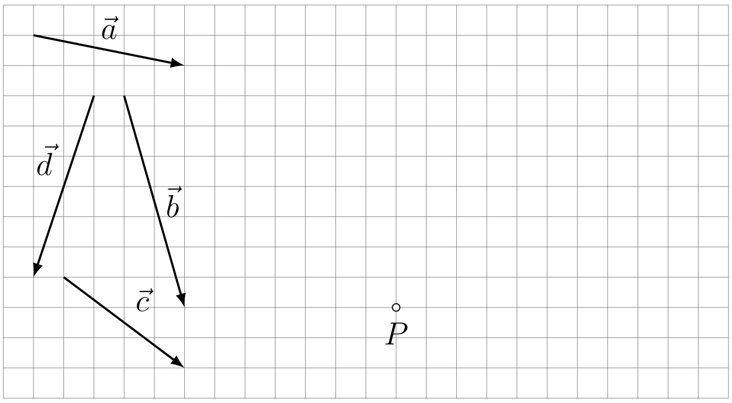
Aufgabe 1.13

Konstruiere aus den Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ den Repräsentanten von $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$ mit dem Anfangspunkt P.



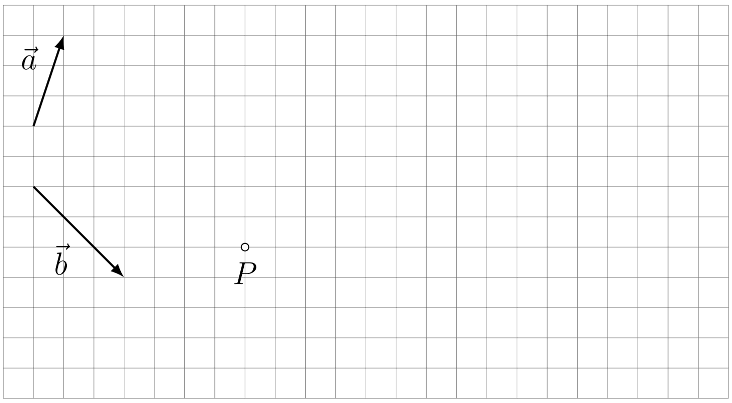
Aufgabe 1.14

Konstruiere aus den Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ den Repräsentanten von $\vec{e} = \vec{a} - (\vec{b} + \vec{c} - \vec{d})$ mit dem Anfangspunkt P.



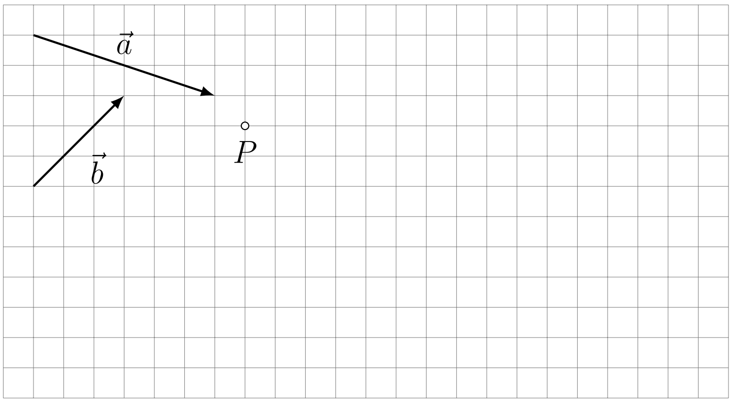
Aufgabe 1.15

Konstruiere aus den Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Repräsentanten von $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ mit dem Anfangspunkt P.



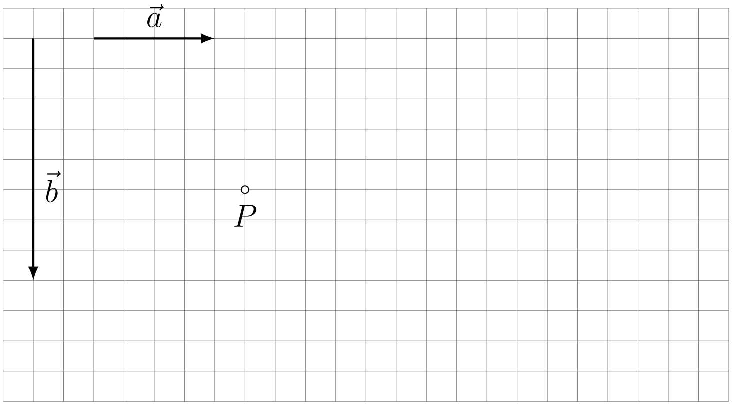
Aufgabe 1.16

Konstruiere aus den Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Repräsentanten von $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$ mit dem Anfangspunkt P.



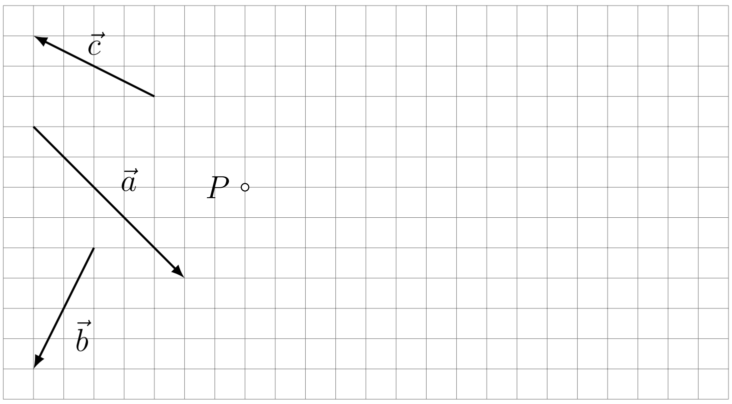
Aufgabe 1.17

Konstruiere aus den Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Repräsentanten von $\vec{c} = \frac{7}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ mit dem Anfangspunkt P.



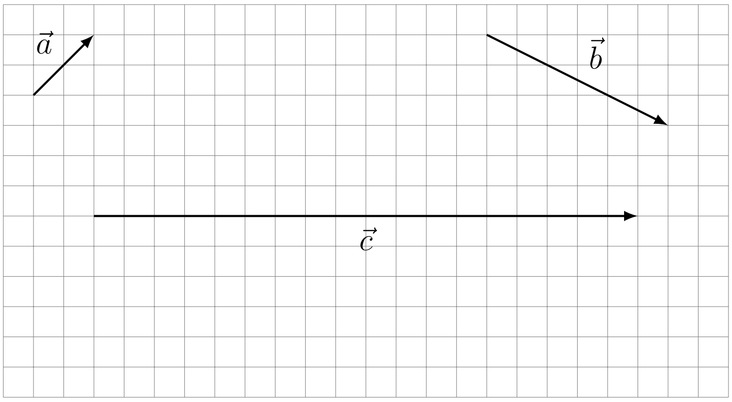
Aufgabe 1.18

Konstruiere aus den Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ den Repräsentanten von $\vec{d} = \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{1}{2}\left(3\vec{b} + 5\vec{c}\right)$ mit dem Anfangspunkt P.



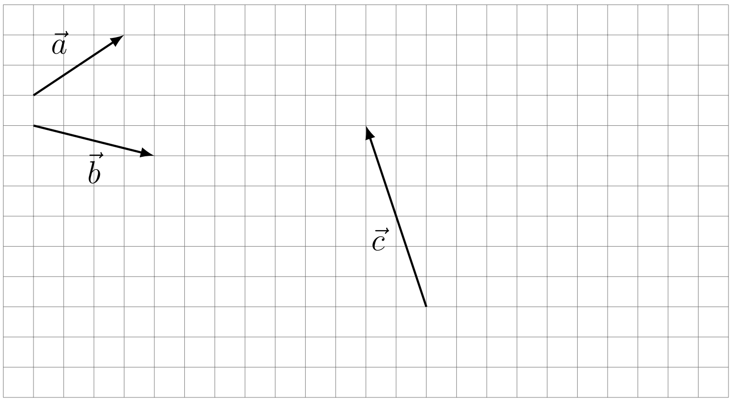
Aufgabe 1.19

Zerlege den Vektor $\vec{c}$ konstruktiv nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und bestimme die Zahlen α und β, für die $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ gilt.



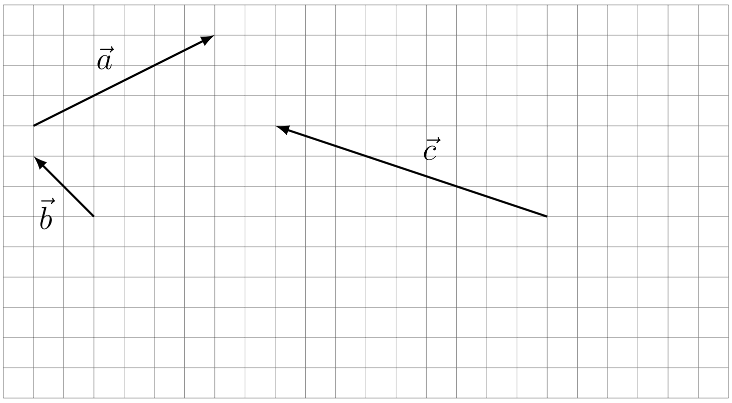
Aufgabe 1.20

Zerlege den Vektor $\vec{c}$ konstruktiv nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und bestimme die Zahlen α und β, für die $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ gilt.



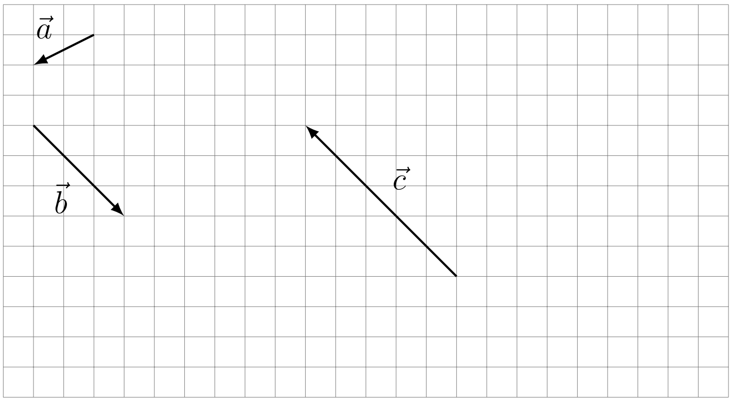
Aufgabe 1.21

Zerlege den Vektor $\vec{c}$ konstruktiv nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und bestimme die Zahlen α und β, für die $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ gilt.



Aufgabe 1.22

Zerlege den Vektor $\vec{c}$ konstruktiv nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und bestimme die Zahlen α und β, für die $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ gilt.



Aufgabe 1.23

Bestimme durch Konstruktion einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x}$, der die Gleichung $\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{x} = \vec{0}$ erfüllt.

Aufgabe 1.24

Löse die Vektorgleichung formal nach $\vec{x}$ auf.

$3\vec{x} - 2\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{x} + 4\vec{a}\right) - 3\vec{b}$

Aufgabe 1.25

Löse die Vektorgleichung formal nach $\vec{x}$ auf.

$\frac{1}{2}\left(2\vec{x} + \vec{b}\right) - \frac{3}{4}\left(3\vec{a} - \vec{x}\right) = \frac{1}{4}\left(4\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{x}$

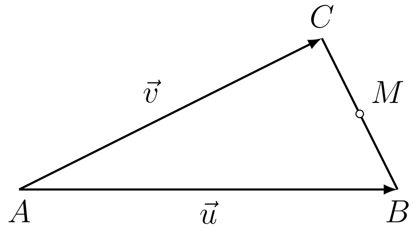
Aufgabe 1.26

Löse die Vektorgleichung formal nach $\vec{x}$ auf.

$2\left(\vec{x} - \vec{a}\right) - 3\left(2\vec{a} - 5\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{x} - 2\vec{b}\right)$

Aufgabe 1.27

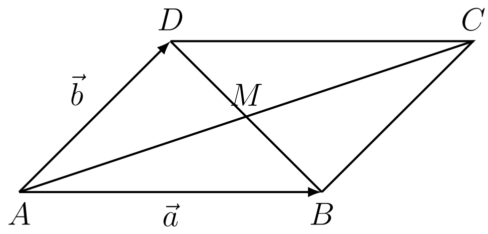
Im Dreieck ABC sind die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ gegeben. Der Punkt M ist Mittelpunkt der Seite BC.



Drücke die Vektoren $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MA}$ möglichst einfach durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus.

Aufgabe 1.28

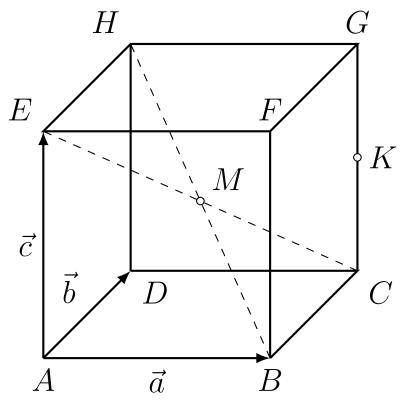
Ein Parallelogramm $ABCD$ wird durch $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ aufgespannt.



Drücke die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MB}$ möglichst einfach durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

Aufgabe 1.29

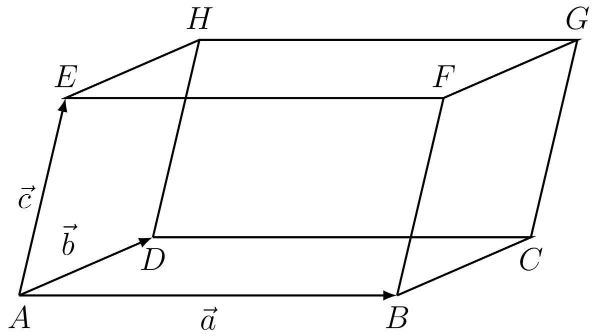
Ein Würfel ist durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebeben. M ist die Würfelmitte und K ein Kantenmittelpunkt.



Drücke die Vektoren $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{EK}$ und $\overrightarrow{MK}$ möglichst einfach durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

Aufgabe 1.30

Durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ wird ein *Spat* aufgespannt.



Drücke die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{HF}$ möglichst einfach durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

Aufgabe 1.31

Vereinfache den Ausdruck $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ so weit wie möglich.

Aufgabe 1.32

Vereinfache den Ausdruck $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ so weit wie möglich.

Aufgabe 1.33

Vereinfache den Ausdruck $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$ so weit wie möglich.

Aufgabe 1.34

Vereinfache den Ausdruck $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP}$ so weit wie möglich.

Aufgabe 1.35

Vereinfache den Ausdruck $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{YX}$ so weit wie möglich.

Aufgabe 1.36

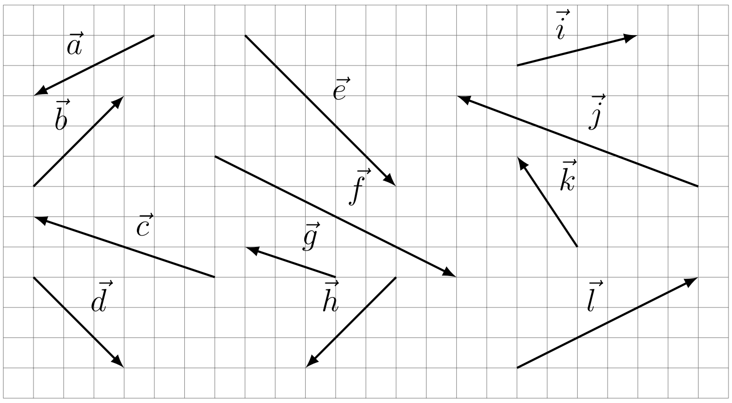
Beweise, dass in jedem Dreieck ABC mit dem Schwerpunkt S die Vektorgleichung $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$ erfüllt ist.

Aufgabe 1.37

Zeige vektoriell, dass die Mittellinie im Dreieck parallel zur Grundlinie und halb so lang wie diese ist.

Aufgabe 2.1

Gib alle Paare kollinearer Vektoren in der Form $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ an.



Aufgabe 2.2

Beweise, dass sich in einem Parallelogramm die Diagonalen halbieren.

Aufgabe 2.3

Im Dreieck ABC teilt der Punkt D die Strecke AB im Verhältnis $1:2$ und der Punkt E die Strecke AC im Verhältnis $3:2$. Die Strecken BE und CD schneiden sich im Punkt F.

Skizziere die Figur und bestimme, in welchem Verhältnis der Punkt F die Strecken BE und CD teilt.

Aufgabe 2.4

Im Dreieck ABC teilt der Punkt D die Seite AC im Verhältnis $1:3$ und der Punkt E die Strecke BC im Verhältnis $2:1$. Die Strecken BD und AE schneiden sich im Punkt F.

Skizziere die Figur und bestimme, in welchem Verhältnis der Punkt F die Strecken BD und AE teilt.

Aufgabe 2.5

In einem Quadrat $ABCD$ teilt der Punkt E die Seite BC im Verhältnis $1:3$ und der Punkt F die Seite CD im Verhhältnis $1:2$. Die Strecken AF und DE schneiden sich im Punkt G.

Skizziere die Figur und bestimme, in welchem Verhältnis der Punkt G die Strecken AF und DE teilt.

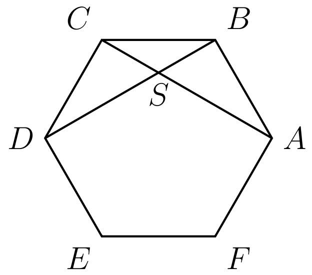
Aufgabe 2.6

Gegeben ist ein Dreieck ABC. M ist die Mitte der Strecke AB. Der Punkt T teilt die Strecke AM im Verhältnis $3:1$. Die Strecke CD geht durch T.

In welchem Verhältnis wird die Strecke CD von T geteilt?

Aufgabe 2.7

Gegeben ist das regelmässige Sechseck $ABCDEF$.



Bestimme das Verhältnis, in dem sich die Strecken AC und BD teilen.

Aufgabe 2.8

In einem Viereck $ABCD$ gilt für die Diagonale AC:

$$\overrightarrow{AC} = \tfrac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB} + \tfrac{4}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$$

Skizziere ein solches Viereck $ABCD$. In welchen Verhältnissen teilen sich die Diagonalen AC und BD?

Aufgabe 3.1

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Komponentendarstellung von $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$

Aufgabe 3.2

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Komponentendarstellung von $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

Aufgabe 3.3

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$

Gesucht: Komponentendarstellung von $\vec{v} = -6\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

Aufgabe 3.4

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Komponentendarstellung von $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Aufgabe 3.5

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gesucht: Komponentendarstellung von $\vec{v} = \vec{a} - 2(\vec{b} - \vec{c})$

Aufgabe 3.6

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gesucht: Komponentendarstellung von $\vec{v} = 4\vec{a} + 3(\vec{b} - 2\vec{c})$

Aufgabe 3.7

Für welche Werte der Variablen entsteht eine wahre Aussage?

$$\begin{pmatrix} 4 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2y \end{pmatrix}$$

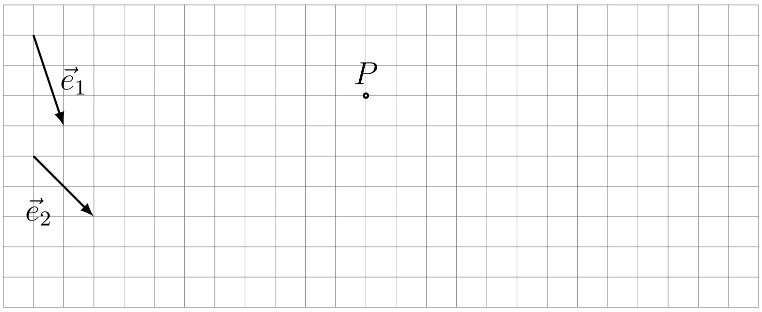
Aufgabe 3.8

Für welche Werte der Variablen entsteht eine wahre Aussage?

$$\begin{pmatrix} x \\ -3 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \\ 2 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 3z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

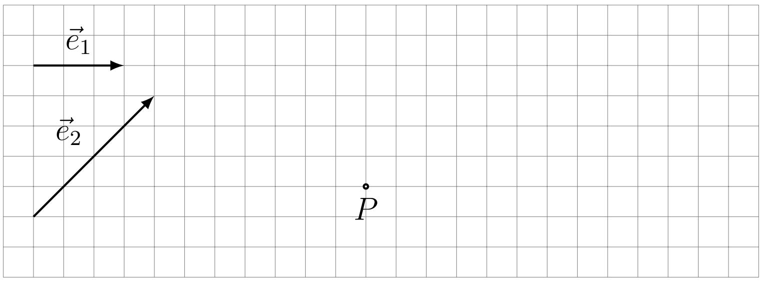
Aufgabe 3.9

Zeichne, ausgehend vom Punkt P, einen Repräsentanten von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.



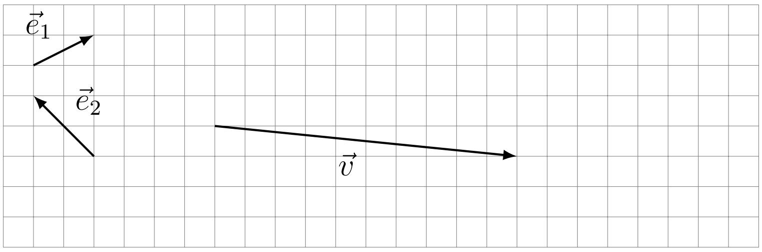
Aufgabe 3.10

Zeichne, ausgehend vom Punkt P, einen Repräsentanten von $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.



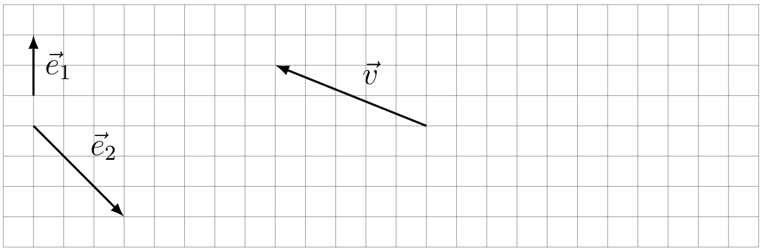
Aufgabe 3.11

Zerlege den Vektor $\vec{v}$ in seine vektoriellen Komponenten bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.



Aufgabe 3.12

Zerlege den Vektor $\vec{v}$ in seine vektoriellen Komponenten bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.



Aufgabe 3.13

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für welchen Vektor $\vec{x}$ gilt $\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} - 7\vec{d} + 2\vec{x} = \vec{0}$?

Aufgabe 3.14

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

Aufgabe 3.15

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

Aufgabe 3.16

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -24 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

Aufgabe 3.17

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

Aufgabe 3.18

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

Aufgabe 3.19

Drücke $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$ durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus.

Aufgabe 3.20

Drücke $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus.

Aufgabe 3.21

Drücke $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ aus.

Aufgabe 4.1

Spiegle den Punkt $P(3, 4, -8)$ an der xy-Ebene. ($\rightarrow P'$)

Aufgabe 4.2

Spiegle den Punkt $P(3, 0, 6)$ an der y-Achse. ($\rightarrow P'$)

Aufgabe 4.3

Spiegle den Punkt $P(7, -5, 0)$ am Ursprung des Koordinatensystems. ($\rightarrow P'$)

Aufgabe 4.4

Spiegle den Punkt $P(3, 4, -3)$ am Punkt $M(0, -3, -3)$. ($\rightarrow P'$)

Aufgabe 4.5

Spiegle den Punkt $P(-1, 7, 6)$ an der yz-Ebene. ($\rightarrow P'$)

Aufgabe 4.6

Spiegle den Punkt $P(2, 9, -3)$ an der x-Achse. ($\rightarrow P'$)

Aufgabe 4.7

Spiegle den Punkt $P(-5, -6, -1)$ am Ursprung des Koordinatensystems. ($\rightarrow P'$)

Aufgabe 4.8

Spiegle den Punkt $P(5, 0, 2)$ am Punkt $M(4, -3, 1)$. ($\rightarrow P'$)

Aufgabe 4.9

Gegeben ist der Punkt $A(5, -3, 1)$. Bestimme den Ortsvektor $\vec{r}_A$.

Aufgabe 4.10

Gegeben ist der Ortsvektor $\vec{r}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Bestimme den Punkt B.

Aufgabe 4.11

Gegeben sind $A(6, -10, 3)$ und $B(-5, 4, 6)$. Bestimme $\overrightarrow{AB}$.

Aufgabe 4.12

Gegeben sind $A(6, -10, 3)$ und $B(-5, 4, 6)$. Bestimme $\overrightarrow{BA}$.

Aufgabe 4.13

Gegeben ist der Punkt $Q(7, 8, -2)$. Bestimme $\overrightarrow{QQ}$.

Aufgabe 4.14

Gegeben: $P(5, -3, 2)$ und $Q(7, 9, -6)$.
Gesucht: Mittelpunkt M der Strecke PQ

Aufgabe 4.15

Gegeben: $A(4, 7, -9)$, $B(-6, 12, 6)$, $C(8, -4, -6)$
Gesucht: Schwerpunkt S des Dreiecks ABC

Aufgabe 4.16

Gegeben: $A(4, 7, -9)$, $B(-6, 12, 6)$, $C(8, -4, -6)$, $D(10, 13, -3)$
Gesucht: Schwerpunkt S des Tetraeders $ABCD$

Aufgabe 4.17

Gegeben: $A(4, -3, 2)$ $B(-2, 1, 5)$ $C(1, 4, 6)$
Gesucht: Punkt D, so dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

Aufgabe 4.18

Gegeben: $A(-2, 2, 1)$, $B(8, -3, 16)$
Gesucht: Punkt P, der AB innen im Verhältnis $2 : 3$ teilt.

Aufgabe 4.19

Gegeben: $A(-2, 2, 1)$, $B(8, -3, 16)$
Gesucht: Punkt Q, der AB aussen im Verhältnis $2 : 3$ teilt.

Aufgabe 4.20

Liegen die Punkte $A(16, 18)$, $B(-17, 12)$, $C(5, 16)$ auf einer Geraden?

Aufgabe 4.21

Liegen die Punkte $A(5, -1, 2)$, $B(7, 1, 3)$, $C(1, -5, 1)$ auf einer Geraden?

Aufgabe 4.22

Liegen die Punkte $A(7, 5, -4)$, $B(11, -3, 8)$, $C(4, 11, -13)$ auf einer Geraden?

Aufgabe 4.23

Liegen $A(1, 3, 2)$, $B(5, 2, 6)$, $C(4, 3, 7)$, $D(-4, 7, 3)$ in einer Ebene?

Aufgabe 4.24

Liegen $A(1, -1, 0)$, $B(-1, 1, -1)$, $C(1, 0, 1)$, $D(1, 1, 1)$ in einer Ebene?

Aufgabe 4.25

Gegeben: Dreieck ABC mit den Ecken $A(7, 7, -2)$, $B(8, 0, -1)$ und dem Schwerpunkt $S(7, 1, 2)$

Gesucht: Koordinaten der Ecke C

Aufgabe 4.26

Gegeben: Tetraeder $ABCD$ mit den Ecken $A(2, -6, 2)$, $B(3, 0, 2)$, $C(5, 1, 7)$ und dem Schwerpunkt $S\big(6, \frac{5}{4}, -1\big)$

Gesucht: Ecke D

Aufgabe 4.27

Bestimme die Länge des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4.28

Bestimme die Länge des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4.29

Gegeben: $A(9, -8)$, $B(1, 7)$

Gesucht: Länge der Strecke AB

Aufgabe 4.30

Gegeben: $A(5, -8, 9)$, $B(12, -2, 3)$

Gesucht: Länge der Strecke AB

Aufgabe 4.31

Gegeben: $A(-2, 2, 8, 4, 9)$ und $B(1, 7, 9, 8, 2)$

Gesucht: $|\overrightarrow{AB}|$

Aufgabe 4.32

Gegeben: $A(2, 6, 5)$, $B(4, 5, 3)$, $C(2, 4, 5)$

Gesucht: Umfang des Dreiecks ABC

Aufgabe 4.33

Bestimme den Umfang des Parallelogramms, dessen Ecken $A(8, 3, 4)$, $B(2, 5, 1)$, $C(6, 1, 3)$ gegeben sind.

Aufgabe 4.34

Bestimme alle zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ kollinearen Vektoren der Länge 21.

Aufgabe 4.35

Gegeben: $A(x, 2, 5)$, $B(5, 1, 7)$

Für welche Werte von x, hat die Strecke AB die Länge 3?

Aufgabe 4.36

Welche Punkte auf der y-Achse haben von $A(4, 7, 12)$ den Abstand 13?

Aufgabe 4.37

Welcher Punkt auf der x-Achse hat von $A(4, 1, 5)$ und $B(6, 3, 1)$ den gleichen Abstand?

Aufgabe 4.38

Welche Punkte auf der y-Achse sind von $A(8, 3, 2)$ doppelt so weit entfernt wie von $B(1, 9, -1)$?

Aufgabe 4.39

Welcher Punkt auf der z-Achse hat von $A(4, 7, -4)$ und $B(-5, 5, 1)$ den gleichen Abstand?

Aufgabe 4.40

Welche Punkte auf der x-Achse sind von $A(7, 3, 6)$ dreimal so weit entfernt wie von $B(-1, 1, -2)$?

Aufgabe 5.1

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -21 \\ 24 \\ 15 \end{pmatrix}$

Gesucht: $-\frac{4}{3}\vec{a}$

Aufgabe 5.2

Gegeben: $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, $\sphericalangle\big(\vec{a}, \vec{b}\big) = 30°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.3

Gegeben: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\sphericalangle\big(\vec{a}, \vec{b}\big) = 45°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.4

Gegeben: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\sphericalangle\big(\vec{a}, \vec{b}\big) = 60°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.5

Gegeben: $|\vec{a}| = 4.5$, $|\vec{b}| = 2.1$, $\sphericalangle\big(\vec{a}, \vec{b}\big) = 90°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.6

Gegeben: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 6$, $\sphericalangle\big(\vec{a}, \vec{b}\big) = 120°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.7

Gegeben: $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 2$, $\sphericalangle\big(\vec{a}, \vec{b}\big) = 180°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.8

Gegeben: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$

Gesucht: $\varphi = \sphericalangle\big(\vec{a}, \vec{b}\big)$

Aufgabe 5.9

Gegeben: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6\sqrt{3}$

Gesucht: $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Aufgabe 5.10

Gegeben: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Gesucht: $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Aufgabe 5.11

Für welchen Winkel $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?

Aufgabe 5.12

Für welchen Winkel $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?

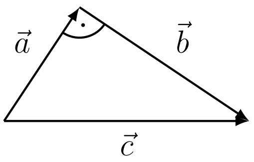
Aufgabe 5.13

Zeige, dass für das Skalarprodukt gilt: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Aufgabe 5.14

Beweise den Satz von Pythagoras mit Hilfe des Skalarprodukts.

Hinweis: Verwende die folgende Figur und $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.



Aufgabe 5.15

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.16

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.17

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.18

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.19

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.20

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.21

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.22

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.23

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.24

Gegeben: $A(-9, 6, 6)$, $B(-3, 14, 8)$, $C(-7, 13, 11)$

Gesucht: alle Innenwinkel des Dreiecks ABC

Aufgabe 5.25

Gegeben: $A(2, 6, 3)$, $B(6, 9, 4)$, $C(4, 14, 10)$

Gesucht: alle Innenwinkel des Dreiecks ABC

Aufgabe 5.26

Bestimme die fehlende Koordinate, so dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}$ einen rechten Winkel einschliessen.

Aufgabe 5.27

Bestimme die fehlende Koordinate t, so dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 4 \end{pmatrix}$ einen rechten Winkel einschliessen.

Aufgabe 5.28

Bestimme die fehlende Koordinate z, so dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ einen Winkel von 45° einschliessen.

Aufgabe 5.29

Für welche Werte von z schliessen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$ einen Winkel von 60° ein?

Aufgabe 5.30

Gegeben: $A(5, 9, -3)$, $B(1, 2, 5)$

Gesucht: Punkt P auf der x-Achse mit $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$

Aufgabe 5.31

Gegeben: $A(6, 0, 4)$, $B(-5, 7, 9)$

Gesucht: Punkt P auf der y-Achse mit $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$

Aufgabe 5.32

Berechne den Winkel zwischen $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b}$, wenn gilt: $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ und $\big(\vec{a}-2\vec{b}\big)\cdot\big(\vec{a}+4\vec{b}\big) = 0$.

Aufgabe 5.33

Berechne $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.34

Berechne $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.35

Berechne $\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.36

Berechne $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.37

Berechne $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.38

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5.39

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5.40

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5.41

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ aufgespannten Dreiecks.

Aufgabe 5.42

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Dreiecks.

Aufgabe 5.43

Untersuche mit Hilfe des Vektorproduktes, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Aufgabe 5.44

Untersuche mit Hilfe des Vektorproduktes, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Aufgabe 5.45

Ist der Wert von $\left(\alpha \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{b}$ ein Vektor, eine Zahl oder nicht definiert?

Aufgabe 5.46

Ist der Wert von $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$ ein Vektor, eine Zahl oder nicht definiert?

Aufgabe 5.47

Ist der Wert von $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$ ein Vektor, eine Zahl oder nicht definiert?

Aufgabe 5.48

Berechne das Volumen, des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spates.

Aufgabe 5.49

Berechne das Volumen, des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spates.

Aufgabe 5.50

Berechne das Volumen, des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Tetraeders.

Aufgabe 5.51

Untersuche mit Hilfe des Spatprodukts, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ linear (un-)abhängig sind.

Aufgabe 5.52

Für welche Werte von y spannen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ einen Spat mit dem Volumen von 213 auf?

Aufgabe 6.1

Bestimme eine Gleichung der Geraden g, die durch $A(2, 1, 3)$ und $B(5, 2, 7)$ geht.

Aufgabe 6.2

Liegt der Punkt $P(14, 11, 7)$ auf der Geraden mit der Gleichung

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 6.3

Gib eine Gleichung der Geraden h an, die parallel zur Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

verläuft und durch den Punkt $Q(8, 9, 4)$ geht.

Aufgabe 6.4

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die durch den Punkt $A(5, 2, 3)$ geht und parallel zur y-Achse verläuft.

Aufgabe 6.5

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die durch den Punkt $A(3, -4, 1)$ geht und die z-Achse bei $z = 7$ schneidet.

Aufgabe 6.6

Bestimme eine möglichst einfache Parametergleichung der Geraden, die durch die Punkte $A(5, 0, -3)$ und $B(-1, 4, 7)$ geht.

Aufgabe 6.7

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die parallel zur x-Achse verläuft und durch den Mittelpunkt der Strecke mit den Endpunkten $A(-4, 1, 5)$ und $B(6, -9, 3)$ geht.

Aufgabe 6.8

Bestimme eine Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $P(-2, 1, 0)$ und den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $A(1, 1, -7)$, $B(6, 4, 2)$, $C(5, -2, 8)$ geht.

Aufgabe 6.9

Bestimme eine möglichst einfache Gleichung der Geraden, welche die Höhe h_c des Dreiecks mit den Ecken $A(1,1,-3)$, $B(3,4,1)$ und $C(0,2,4)$ enthält.

Aufgabe 6.10

Welche der Punkte $P(-2,-1,7)$, $Q(8,9,8)$ und $R(4,5,-2)$ liegen auf der Geraden

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 6.11

Welche spezielle Lage hat die Gerade?

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(c) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 6.12

Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt $P(7,6,3)$ geht und parallel zur Geraden $h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft.

Aufgabe 6.13

Bestimme alle Spurpunkte der Geraden $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.14

Im welchen Verhältnis teilt der mittlere der drei Spurpunkte der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

die Verbindungsstrecke zwischen den äusseren beiden Spurpunkten?

Aufgabe 6.15

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.16

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.17

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.18

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.19

Zeige, dass sich die Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel.

Aufgabe 6.20

Zeige, dass sich die Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

scheiden und bestimme den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel.

Aufgabe 6.21

Die Strecke mit den Endpunkten $A(-4, 5, -2)$ und $B(5, -1, 4)$ ist in drei gleiche Teile zu zerlegen. Ermittle die Koordinaten der Teilungspunkte.

Aufgabe 6.22

Bestimme den Abstand des Punktes $P(0, 3, 7)$ von der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und den Fusspunkt F des Lots von P auf g.

Aufgabe 6.23

Bestimme den Abstand der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.24

Zeige, dass sich die beiden Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

schneiden und bestimme die Gleichungen ihrer Winkelhalbierenden.

Aufgabe 6.25

Bestimme eine Gleichung der Geraden h, die orthogonal zur Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht und durch den Punkt $P(5, 8, 1)$ geht.

Aufgabe 6.26

Bestimme die Gleichung der Normalprojektion der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

auf die xy-Ebene.

Aufgabe 6.27

Welche Punkte auf der Geraden $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben vom Punkt $Q(1, -2, 3)$ den Abstand $d = 3$?

Aufgabe 6.28

Ein Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig durch den Raum. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich im Punkt $A(-6, -4, -9)$ und 10 Sekunden später im Punkt $B(24, 16, 1)$.

(a) Gib eine Parametergleichung der Bahn an?

(b) Wo befindet sich der Körper zur Zeit $t = 15\,\mathrm{s}$?

(c) Wann hat der Körper vom Ursprung eine Entfernung von $7\,\mathrm{m}$?

(Es gilt $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1\,\mathrm{m}$.)

Aufgabe 7.1

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Punkte A, B und C enthält.

(a) $A(4, 0, 8)$, $B(4, -5, 9)$, $C(4, 0, 2)$

(b) $A(4, 9, 2)$, $B(-6, 4, 4)$, $C(-2, 6, 3)$

(c) $A(3, -8, 0)$, $B(8, 4, -8)$, $C(4, -1, 3)$

(d) $A(-5, 7, 4)$, $B(3, -2, 2)$, $C(3, 0, -2)$

Aufgabe 7.2

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g gegeben ist.

(a) $P(3, -2, 0)$ $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $(3, -2, 0)$, $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.3

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die parallelen Geraden g und h definiert ist.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.4

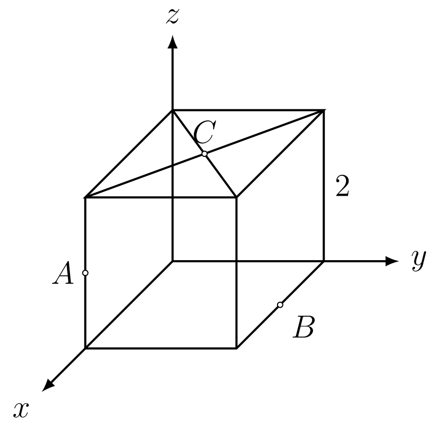
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene,

(a) die parallel zur xy-Ebene ist und den Punkt $P(5, 3, -6)$ enthält.

(a) die parallel zur xz-Ebene ist und den Punkt $P(7, 9, 1)$ enthält.

Aufgabe 7.5

Im unten dargestellten Würfel sind A und B Kantenmittelpunkte. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ABC?



Aufgabe 7.6

Bestimme die Gleichung einer Ebene, die senkrecht zum Vektor $\vec{v}$ steht und durch den Punkt P geht.

(a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P(2, 8, -5)$

(b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P(4, 0, 3)$

Aufgabe 7.7

Zeige, dass sich die beiden Geraden schneiden und bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch g und h aufgespannt wird.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \; h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.8

Beschreibe die spezielle Lage der Ebene.

(a) $\varepsilon\colon z = 2y - 1$

(b) $\varepsilon\colon y = -x + 4$

(c) $\varepsilon\colon 2x + 3z - 4 = 0$

(d) $\varepsilon\colon x = 3$

(e) $\varepsilon\colon z = -1$

(f) $\varepsilon\colon y = 0$

Aufgabe 7.9

Berechne die Achsenabschnitte der Ebene.

(a) $\varepsilon\colon 2x - 3y + z - 6 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 3y - 4z + 12 = 0$

(c) $\varepsilon\colon 4x + 5y - 2z + 10 = 0$

(d) $\varepsilon\colon x - 4y + 3z = 0$

Aufgabe 7.10

Berechne formal eine Ebenengleichung aus den Achsenabschnitten $x = a$, $y = b$ und $z = c$ und dividiere das Ergebnis durch abc.

Aufgabe 7.11

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch ihre Achsenabschnitte gegeben ist.

(a) $a = 2,\ b = 2,\ c = 3$

(b) $a = 3,\ c = -7$

(c) $a = 1,\ b = -4,\ c = 2$

(d) $a = b = c = 0$

Aufgabe 7.12

Stelle die Gleichung der Ebene in der Koordinatenform dar.

(a) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.13

Stelle die Gleichung der Ebene in der Parameterform dar.

(a) $\varepsilon\colon 5x - 2y + z - 6 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 4y - z + 7 = 0$

(c) $\varepsilon\colon 2x + 4y - 6z + 1 = 0$

(d) $\varepsilon\colon 3z - 5 = 0$

Aufgabe 7.14

Bestimme die Parametergleichungen der Spuren der Ebene.

(a) $\varepsilon\colon x - 3y + 2z - 6 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 3y + 5z - 15 = 0$

Aufgabe 7.15

Liegt der Punkt P in der Ebene ε?

(a) $\varepsilon\colon 3x - 2y - 5z + 11 = 0$; $P(5, -2, 6)$

(b) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $P(2, 4, 1)$

Aufgabe 7.16

In der Ebene $\varepsilon\colon 3x - 2y + z - 4 = 0$ ist ein Punkt P zu bestimmen,

(a) der auf der z-Achse liegt,

(b) der drei gleiche Koordinaten hat,

(c) der den Grundriss $P'(1, -5, 0)$ besitzt,

(d) der den Seitenriss $P'''(2, 0, 4)$ besitzt,

Aufgabe 7.17

Ist das Viereck $ABCD$ mit $A(3, -1, 2)$ $B(4, 0, 1)$ $C(1, 5, 3)$ und $D(-2, 0, 6)$ eben oder nicht?

Aufgabe 7.18

Bestimme den Schnittpunkt der drei Ebenen.

- $\varepsilon_1\colon 3x - 2y + z - 8 = 0$
- $\varepsilon_2\colon x + y - 3z + 4 = 0$
- $\varepsilon_3\colon 4x + 3y - 5z - 8 = 0$

Aufgabe 7.19

Die Ebene $\varepsilon\colon 9x + 16y + pz - 144 = 0$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten A, B und C. Bestimme p, so dass die Pyramide $OABC$ mit dem Koordinatenursprung O als vierte Ecke, das Volumen $V = 384$ besitzt.

Aufgabe 7.20

Beschreibe die besondere Lage der Ebenen im $\mathbb{R}^3$.

(a) $\varepsilon\colon 2y - z - 1 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 5x - 2y + 7z = 0$

(c) $\varepsilon\colon y = 4 - x$

(d) $\varepsilon\colon z = 3$

Aufgabe 7.21

Bestimme den Durchstosspunkt der Geraden g mit der Ebene ε.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon 3x + 8y + 4z + 8 = 0$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon -3x + 7y + 9z - 5 = 0$

(c) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon 9x - 4y + 6z - 5 = 0$

(d) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon x + 4y - 2z - 2 = 0$

Aufgabe 7.22

Bestimme den Durchstosspunkt der Geraden g mit der Ebene E.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

(c) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.23

Bestimme eine Parametergleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

(a) $\varepsilon_1\colon 4x + 2y + 5z + 5 = 0$; $\varepsilon_2\colon 6x + 4y + 9z - 7 = 0$

(b) $\varepsilon_1\colon x + y + 3 = 0$; $\varepsilon_2\colon 5x + 8y + 3z - 3 = 0$

Aufgabe 7.24

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ, die parallel zur Ebene ε ist und durch den Punkt P geht.

(a) $\varepsilon\colon 2x - 3y + 5z + 4 = 0$; $P(1, 1, 1)$

(b) $\varepsilon\colon 7x + 2y - 8z + 9 = 0$; $P(3, -2, 4)$

Aufgabe 7.25

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ, die senkrecht zur Gerade g ist und durch den Punkt P geht.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $P(5, 1, 9)$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P(4, 0, -5)$

Aufgabe 7.26

Bestimme eine Gleichung der Mittelnormalebene der Strecke AB.

(a) $A(2,4,1)$, $B(6,-8,7)$

(b) $A(5,-5,4)$, $B(5,9,2)$

Aufgabe 7.27

Welcher Punkt auf der Geraden g hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand?

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A(-1,2,1)$, $B(3,4,-7)$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A(-3,6,5)$, $B(5,2,-3)$

Aufgabe 7.28

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die Punkte P und Q geht und normal zur Ebene ε steht.

(a) $P(1,3,0)$, $Q(3,2,1)$; $\varepsilon\colon 4x+3y-2=0$

(b) $P(2,0,1)$, $Q(-3,-4,2)$; $\varepsilon\colon 3x+y+7z-2=0$

Aufgabe 7.29

Der Punkt P wird an der Ebene ε gespiegelt. Gesucht sind die Koordinaten des gespiegelten Punktes P'.

(a) $P(0,4,-5)$, $\varepsilon\colon 4x-3y+z+4=0$

(b) $P(4,0,-2)$, $\varepsilon\colon x-2y+3z-5=0$

(c) $P(-1,-6,17)$, $\varepsilon\colon 3x-8z-7=0$

Aufgabe 7.30

Der Punkt $P'(0,0,7)$ ist der Spiegelpunkt von $P(4,3,-2)$. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ε, an der P gespiegelt wurde?

Aufgabe 7.31

Die Gerade g wird an der Ebene ε gespiegelt. Bestimme eine Parametergleichung der Spiegelgeraden g'.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon 4x + 2y - z + 1 = 0$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon x - 3y - 2z + 42 = 0$

Aufgabe 7.32

Ein Lichtstrahl geht durch $P(7, -7, 4)$ und wird an der Ebene $\varepsilon\colon 5x - 2y + 3z - 23 = 0$ reflektiert. Der Punkt $Q(7, -1, 8)$ liegt auf dem reflektierten Lichtstrahl. In welchem Punkt der Ebene ε erfolgt die Reflexion?

Aufgabe 7.33

Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle $P(14, 7, -11)$ aus, wird in $R(5, 1, 4)$ an der Ebene ε reflektiert und läuft anschliessend durch den Punkt $Q(3, 13, 2)$. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ε?

Aufgabe 7.34

Bestimme den spitzen Schnittwinkel der Ebenen ε und δ

(a) $\varepsilon\colon 5x - y - 6z + 1 = 0$; $\delta\colon 4x + z - 3 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 3x - 2y + 5z - 2 = 0$; δ gegeben durch $P(3, -1, 4)$ und $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\varepsilon\colon 2x + 4y - 3z + 7 = 0$; δ gegeben durch die parallelen Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},\ h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.35

Bestimme den spitzen Schnittwinkel von Gerade g und Ebene ε.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon 3x - 4y + 6 = 0$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon 2x - 5y + z + 3 = 0$

Aufgabe 7.36

Für welchen Wert c schliesst die Ebene $\varepsilon\colon 4x+cz-1=0$ mit der xy-Ebene einen Winkel von $45°$ ein?

Aufgabe 7.37

Ein gerader Kreiskegel besitzt die Spitze $S(-7,-3,14)$. Der Punkt $M(3,-1,3)$ ist der Mittelpunkt des Grundkreises. $P(1,-1,8)$ liegt auf einer Mantellinie des Kegels. Berechne das Volumen des Kegels.

Aufgabe 7.38

Vom Quadrat $ABCD$ sind $A(3,2,1)$, $B(-3,-1,-5)$ und $C(3,y,z)$ gegeben. Dieses Quadrat ist Grundfläche einer geraden Pyramide mit dem Volumen $V=324$.

(a) Bestimme die *ganzzahligen* Werte y und z.

(b) Welche Koordinaten hat die Spitze S der Pyramide? (zwei Lösungen)

Aufgabe 7.39

Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

(a) $P(3,5,1)$, $\varepsilon\colon 4x+7y-4z+2=0$

(b) $P(7,-2,-5)$, $\varepsilon\colon 6x-9y-2z+7=0$

(c) $P(-4,0,29)$, $\varepsilon\colon 15x+8y-8=0$

Aufgabe 7.40

$A(0,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(1,2,0)$ und $D(1,1,2)$ sind Eckpunkte einer Pyramide $ABCD$.

Berechne die Höhe der Pyramide über der Grundfläche BCD und den Winkel, den die Seitenkante AC mit der Grundfläche BCD einschliesst.

Aufgabe 7.41

Bestimme die Koordinatengleichungen der Parallelebenen zur Ebene ε im Abstand d.

(a) $\varepsilon\colon 11x-2y+10z-15=0$, $d=3$

(b) $\varepsilon\colon 24x-7z+5=0$, $d=4$

(c) $\varepsilon\colon 9x+12y+8z-6=0$, $d=2$

Aufgabe 7.42

Bestimme die Koordinatengleichungen der winkelhalbierenden Ebenen der gegebenen Ebenen ε und δ.

(a) $\varepsilon\colon 4x - 2y - 4z + 3 = 0$, $\delta\colon x + 2y - 2z + 5 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 6x + 6y + 17z - 2 = 0$, $\delta\colon 15x - 10y - 6z + 9 = 0$

(c) $\varepsilon\colon 10x - 11y + 2z - 11 = 0$, $\delta\colon 4y - 3z - 8 = 0$

(d) $\varepsilon\colon 3x - 6y - 2z - 10 = 0$, $\delta\colon 4x + 8y - z - 10 = 0$

Aufgabe 7.43

Welche Punkte auf der Geraden g haben von den Ebenen ε und δ gleiche Abstände?

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$

$\varepsilon\colon 3x - 4y + 2 = 0$, $\delta\colon 4x + 3z + 7 = 0$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$

$\varepsilon\colon 14x - 7y - 22z + 38 = 0$, $\delta\colon 4x + 7y - 4z + 2 = 0$

Aufgabe 7.44

(a) Welchen Abstand hat der Punkt $P(3, 3, 5)$ von der Ebene $\varepsilon\colon x - 12y + 12z + 7 = 0$?

(b) Ein Punkt $Q(x, 1, 1)$ hat gleichen Abstand von ε und von der xy-Ebene. Bestimme seine x-Koordinate.

Aufgabe 8.1

Stelle die Gleichung der Kugel $K(M, \varrho)$ auf.

(a) $M(1, 1, 1)$, $\varrho = 4$

(b) $M(3, 0, -2)$, $\varrho = \sqrt{5}$

Aufgabe 8.2

Untersuche, ob es sich um die Gleichung einer Kugel handelt und bestimme in diesem Fall ihren Mittelpunkt M und ihren Radius ϱ.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = -12$

(c) $x^2 + y^2 - z^2 + 6x - 2y + 4z = 25$

(d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 1$

Aufgabe 8.3

Schneide die Kugel $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ mit der Grundrissebene.

Aufgabe 8.4

Eine Kugel mit Zentrum $M(3, 1, -4)$ schneidet die y-Achse im Punkt $B(0, 7, 0)$. Bestimme die übrigen Schnittpunkte der Kugel mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 8.5

Untersuche die gegenseitige Lage von Kugel K und Gerade g und bestimme allfällige Schnitt- oder Berührungspunkte.

(a) $K\colon (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9;\;\; g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $K\colon x^2 + y^2 + z^2 = 49;\;\; g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $K\colon (x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z - 1)^2 = 9;\;\; g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8.6

Bestimme die Gleichung der Umkugel des Tetraeders mit den Ecken $A(5,5,1)$, $B(7,1,-3)$, $C(2,7,2)$ und, $D(0,1,8)$.

Aufgabe 8.7

Zeige, dass der Punkt $P(8,7,2)$ auf der Kugel mit dem Mittelpunkt $M(1,3,6)$ und dem Radius $\varrho = 9$ liegt und bestimme die Gleichung der Tangentialebene in P.

Aufgabe 8.8

Vom Punkt $A(10,0,0)$ aus soll eine Tangentialebene an die Kugel $K\colon x^2 + y^2 + z^2 = 9$ gelegt werden, die zur Grundrissebene π_1 senkrecht steht.

Aufgabe 8.9

Bestimme die Tangentialebenen an die Kugel mit $M(0,0,0)$ und $\varrho = 3$, welche die Gerade mit der Gleichung

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

enthalten.

Aufgabe 8.10

Bestimme die Tangentialebenen an die Kugel mit $M(0,0,0)$ und $\varrho = 5$, die senkrecht zur Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stehen.

Aufgabe 8.11

Gegeben sei die Kugel K mit $M(8,3,2)$ und $\varrho = 5\sqrt{2}$ sowie die Gerade

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fasst man den Punkt $A(-3,-2,-4)$ der Geraden als Lichtquelle auf und betrachtet die Kugelfläche K als Spiegel, so wird der Lichtstrahl g an der Kugel reflektiert. Bestimme eine Parametergleichung des reflektierten Lichtstrahls.

Aufgabe 8.12

Gegeben sind die Kugeln K_1 und K_2 mit den Mittelpunkten $M_1(1, 13, 18)$ bzw. $M_2(-1, 13, 14)$ und den Radien $\varrho_1 = 7$ bzw. $\varrho_2 = 3$. Zeige, dass sich die Kugeln schneiden und bestimme den Radius r des Schnittkreises.