Vektorgeometrie

Theorie

Kollegium St. Fidelis
W. Gehrig
Version vom 30. August 2019

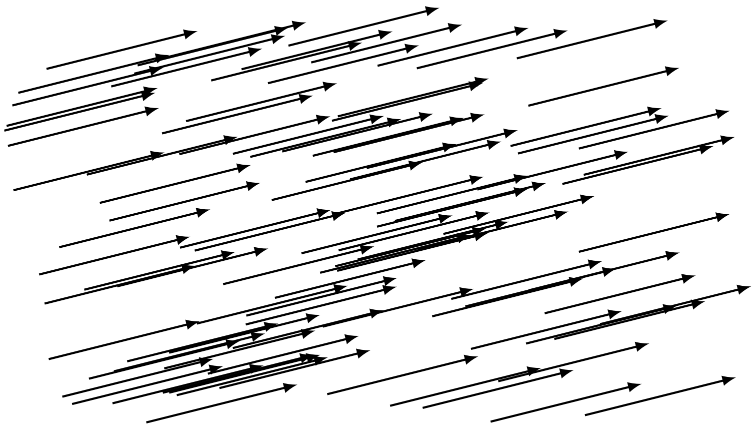
Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Der Vektorbegriff

Ein *Vektor* ist die Menge aller Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung. Vektoren bezeichnen wir mit Kleinbuchstaben, über die ein Pfeil gesetzt wird ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, ...).

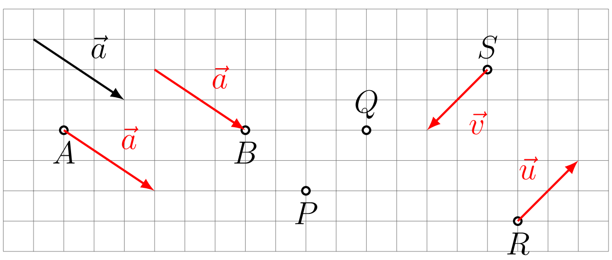
Ein einzelner Pfeil wird *Repräsentant* des Vektors genannt. Repräsentanten werden durch ihren Anfangs- und Endpunkt dargestellt, über die ein Pfeil gezeichnet wird (z. B. $\overrightarrow{AB}$).



Übung 1.1

Zeichne den Repräsentanten ...

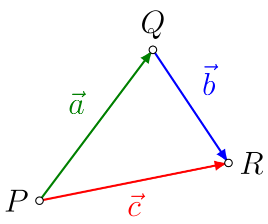
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt A beginnt,
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt B endet,
- des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, der im Punkt R beginnt,
- des Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{QP}$, der im Punkt S beginnt.



1.2 Die Vektoraddition

Definition der Summe $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ zweier Vektoren:

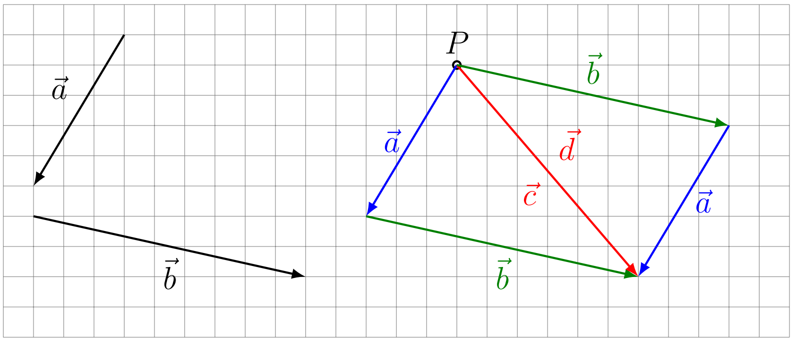
- Wähle einen beliebigen Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$.
- Wähle den Repräsentanten $\overrightarrow{QR}$ von $\vec{b}$, der in Q beginnt.
- $\overrightarrow{PR}$ ist ein Repräsentant von $\vec{c}$



Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl des Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$. Dadurch ist $\vec{c}$ eindeutig bestimmt.

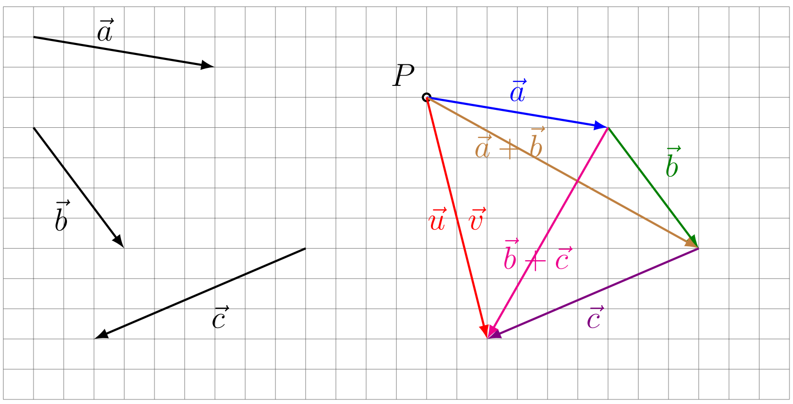
1.3 Eigenschaften

Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?



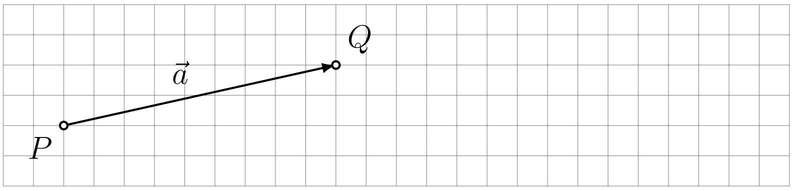
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Das Kommutativgesetz gilt.

Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?



$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ Das Assoziativgesetz gilt.

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{a}$?



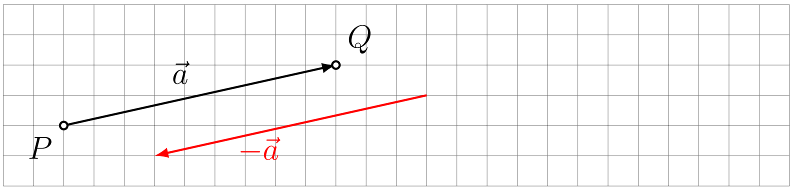
Anfangs- und Endpunkt von $\vec{x}$ fallen zusammen.

$\vec{x} = \overrightarrow{QQ} = \vec{0}$ heisst *Nullvektor*.

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$

$\vec{0}$ ist das *neutrale Element* der Vektoraddition.

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$?



$\vec{x} = \overrightarrow{QP}$

$\vec{x}$ ist der *Gegenvektor* von $\vec{a}$.

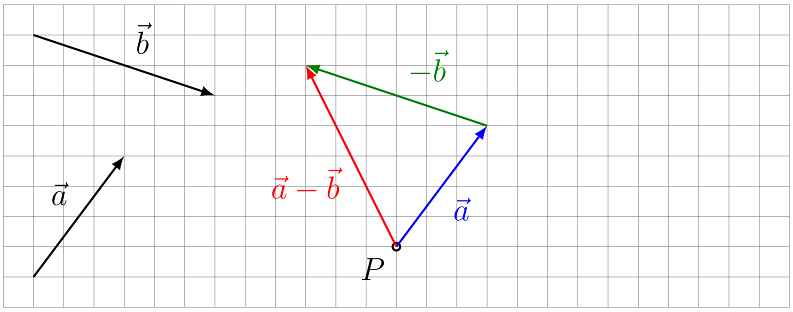
$\overrightarrow{QP} = -\vec{a}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ für alle Vektoren $\vec{a}$

$-\vec{a}$ ist das *inverse Element* der Vektoraddition.

1.4 Die Vektorsubtraktion

Bestimme vom Punkt P aus einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

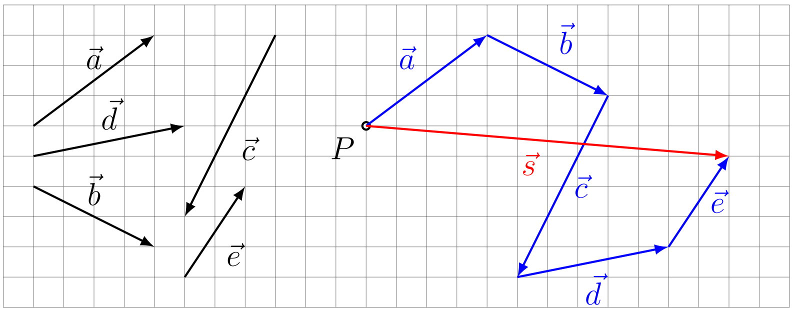


$\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

Man subtrahiert einen Vektor, indem man seinen Gegenvektor addiert.

1.5 Vektorketten

Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.



In der Physik heisst $\vec{s}$ *Resultierende* (z. B. von Kräften).

Gilt $\vec{s} = \vec{0}$, dann ist die Vektorkette *geschlossen*.

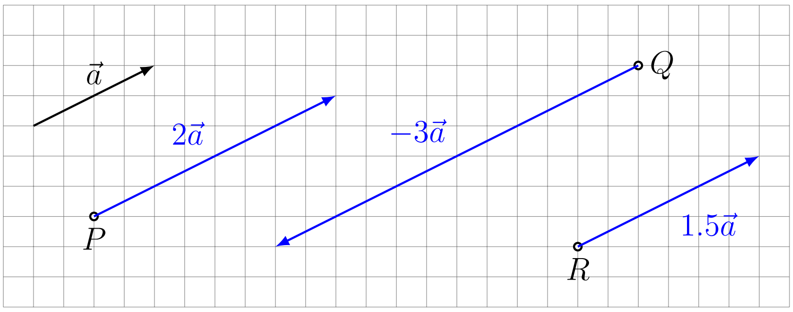
1.6 Die s-Multiplikation

Zeichne Repräsentanten folgender Vektoren:

(a) das 2-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt P

(b) das -3-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt Q

(c) das 1.5-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt R



Die s-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

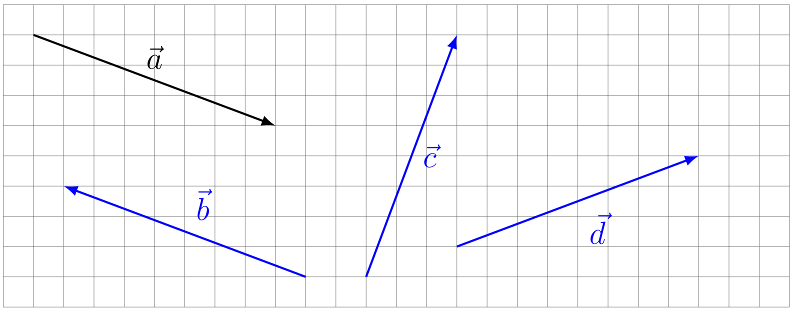
Eigenschaften:

- $\beta \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \vec{a}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
- $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$

1.7 Länge eines Vektors

Mit $|\vec{a}|$ oder $\|\vec{a}\|$ oder a bezeichnet man die *Länge* (oder *Norm*) des Vektors $\vec{a}$.

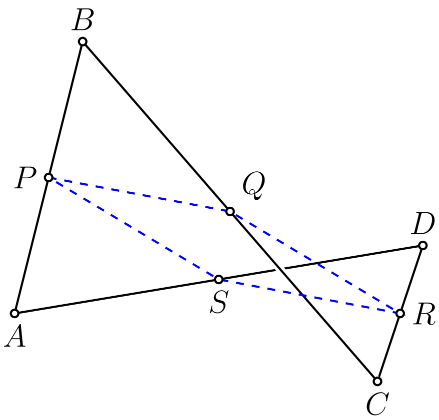
Zeichne Repräsentanten von drei verschiedenen Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$, die alle die gleiche Länge wie $\vec{a}$ haben.



1.8 Beispiele

Räumliches Viereck

Zeige, dass die Seitemitten P, Q, R und S des räumlichen Vierecks $ABCD$ ein Parallelogramm bilden.



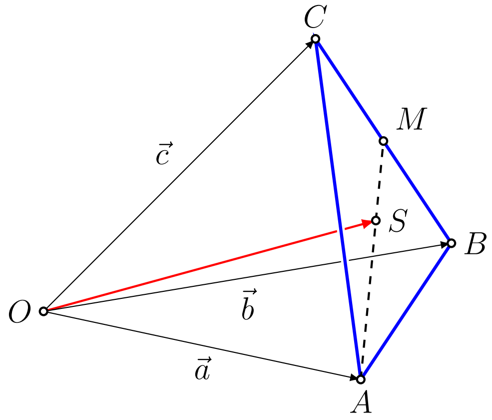
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Wegen $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SR}$ sind die Strecken PQ und SR parallel und gleich lang. (w.z.b.w.)

Schwerpunkt eines Dreiecks

Drücke den Vektor $\overrightarrow{OS}$ von O zum Schwerpunkt S des Dreiecks ABC durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}[-\vec{b} + \vec{c}]\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

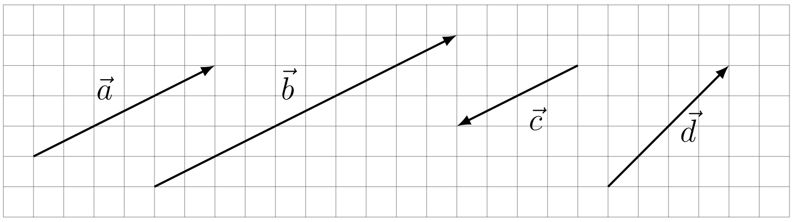
$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

2 Lineare Unabhängigkeit

2.1 Kollineare Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear* (*linear abhängig*), wenn deren Repräsentanten parallel zu einer gemeinsamen Geraden sind.

Sind zwei Vektoren *nicht kollinear*, so werden sie auch *linear unabhängig* genannt.



$\vec{a}$ ist kollinear zu $\vec{b}$, $\vec{a}$ ist kollinear zu $\vec{c}$ und $\vec{b}$ ist kollinear zu $\vec{c}$.

$\vec{d}$ ist zu keinem der übrigen Vektoren kollinear.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

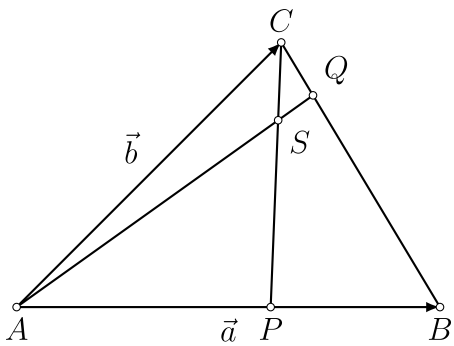
$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = 0$ besitzt.

Der Ausdruck $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ wird *Linearkombination* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genannt.

Anschaulich: Wollen wir mit linear unabhängigen Vektoren einen Weg beschreiben, der uns an den Anfangspunkt zurückführt, so ist dies nur möglich, indem wir gar nicht erst losgehen.

2.2 Anwendung



P teilt AB im Verhältnis $3 : 2$

Q teilt BC im Verhältnis $4 : 1$.

In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecken AQ und CP?

Schritt 1

Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

Zum Beispiel: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

Schritt 2

Wahl einer geschlossene Vektorkette, die den Punkt S enthält:

$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) = \alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= -\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \beta \cdot (\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CA}) = \beta \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)$$

$$= \beta \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot [-\vec{a} + \vec{b}] - \vec{b}\right) = -\frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b}$$

Schritt 4

Die Ausdrücke von oben in die geschlossene Vektorkette einsetzen:

$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} + \left(-\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}\right) + \left(-\frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b}\right) = \vec{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} - \frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} - \frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen und ausklammern:

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta\right) \cdot \vec{a} + \left(\alpha - \frac{4}{5}\beta\right) \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta = 0 \quad$ und $\quad \alpha - \frac{4}{5}\beta = 0$

$3 - 3\alpha - \beta = 0 \quad$ und $\quad 5\alpha - 4\beta = 0$

$$\begin{vmatrix} 3\alpha + \beta = 3 \\ 5\alpha - 4\beta = 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{matrix}$$

$4 \cdot \text{(I)} + \text{(II)}$: $17\alpha = 12 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{12}{17}$

(I): $3 \cdot \frac{12}{17} + \beta = 3 \quad \Rightarrow \quad 36 + 17\beta = 51 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{15}{17}$

Schritt 6

Geometrische Deutung des Resultats:

$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{12}{17} \cdot \overrightarrow{PC}$

$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \frac{15}{17} \cdot \overrightarrow{QA}$

- S teilt CP im Verhältnis $5 : 12$
- S teilt AQ im Verhältnis $15 : 2$

2.3 Drei Vektoren

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind *komplanar* (*linear abhängig*), wenn deren Repräsentanten parallel zu einer Ebene sind.

Sind drei Vektoren *nicht komplanar*, so werden sie auch *linear unabhängig* genannt.

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

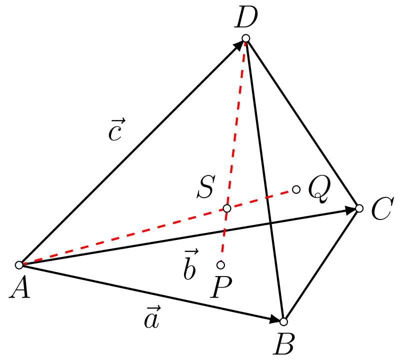
$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$ besitzt.

Anschaulich: Wollen wir mit linear unabhängigen Vektoren einen Weg beschreiben, der uns an den Anfangspunkt zurückführt, so ist dies nur möglich, indem wir gar nicht erst losgehen.

2.4 Anwendung

Gegeben ist ein Tetraeder $ABCD$ mit den Dreieckschwerpunkten P und Q, sowie den entsprechenden Schwerlinien DP und AQ.



Schneiden sich die Schwerlinien im Schwerpunkt S? Wenn ja, in welchem Verhältnis teilen sie sich?

Schritt 1

Wähle 3 linear unabhängige Vektoren. Zum Beispiel:

- $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$
- $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$

Schritt 2

Wähle eine geschlossene Vektorkette, die S enthält:

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}$$

Schritt 3

Stelle die Vektoren in (2) durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

$$\overrightarrow{AS} = x \cdot \overrightarrow{AQ} = x\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c}$$

$$\overrightarrow{SP} = y \cdot \overrightarrow{DP} = y\left(-\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}[-\vec{c} + \vec{a}] + \frac{1}{3}[-\vec{c} + \vec{b}]\right)$$

$$= \frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{1}{3}y\vec{b} - y\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b}) = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

Schritt 4

Einsetzen und ordnen:

$$\frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c} + \frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{1}{3}y\vec{b} - y\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{3}x - y\right)\vec{c} = \vec{0}$$

Schritt 5

Lineare Unabhängigkeit ausnützen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x - y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y - 1 &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \\ x - 3y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{3}{4} \\ y &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Schritt 6

Geometrische Deutung:

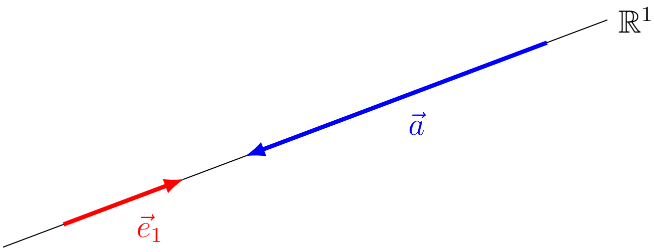
Kein Widerspruch $\Rightarrow$ die Schwerlinien schneiden sich in einem Punkt.

$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AQ} \quad \Rightarrow \quad S$ teilt AQ im Verhältnis $3:1$

$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DP} \quad \Rightarrow \quad S$ teilt DP im Verhältnis $3:1$

3 Basisvektoren

3.1 Eindimensionaler Raum

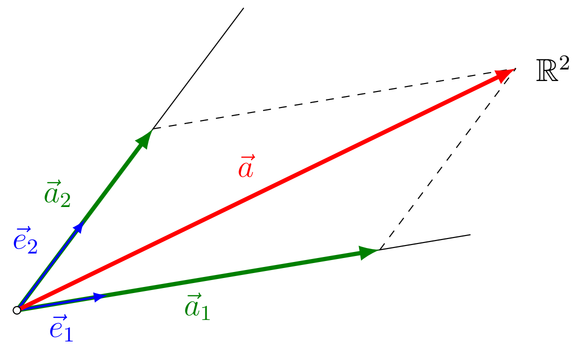


Gegeben: ein Basisvektor $\vec{e}_1$ (frei wählbar, $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$)

Jeder andere Vektor in $\mathbb{R}^1$ ist *kollinear* zu $\vec{e}_1$.

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 \quad \text{[im Bild: } \vec{a} = -2.5 \cdot \vec{e}_1\text{]}$$

3.2 Zweidimensionaler Raum



Gegeben: zwei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (frei wählbar, nicht kollinear)

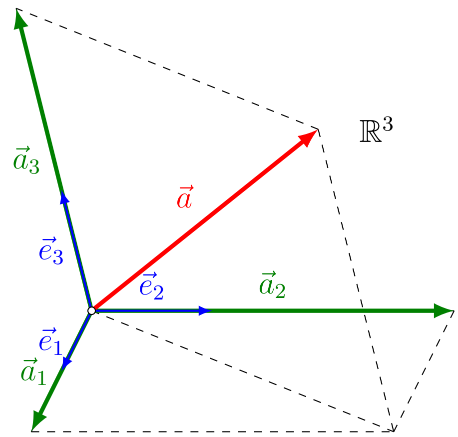
Jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ geschrieben werden. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind die *vektoriellen Komponenten* von $\vec{a}$:

$$\vec{a}_1 = a_1 \cdot \vec{e}_1 \quad \text{[im Bild: } \vec{a}_1 = 4 \cdot \vec{e}_1\text{]}$$
$$\vec{a}_2 = a_2 \cdot \vec{e}_2 \quad \text{[im Bild: } \vec{a}_2 = 2 \cdot \vec{e}_2\text{]}$$

Die Zahlen a_1 und a_2 sind die *skalaren Komponenten* von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$. (Skalar = Zahl)

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{\text{Komponentendarstellung von } \vec{a}}$$

3.3 Dreidimensionaler Raum



Gegeben: drei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (frei wählbar, nicht komplanar)

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$: vektorielle Komponenten von $\vec{a}$

a_1, a_2, a_3: skalare Komponenten von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: Komponentendarstellung von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

3.4 Die Vektoroperationen in der Komponentendarstellung

Die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3$$

sind durch ihre skalaren Komponenten bezüglich der *gleichen Basis* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ gegeben.

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{b} \quad &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3 \\ &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 - b_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 - b_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 - b_3\,\vec{e}_3 = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \vec{0} \end{aligned}$$

Da $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ linear unabhängig sind, folgt:

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= 0 \quad \text{und} \quad & a_2 - b_2 &= 0 \quad \text{und} \quad & a_3 - b_3 &= 0 \\ a_1 &= b_1 \quad \text{und} & a_2 &= b_2 \quad \text{und} & a_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad a_2 = b_2 \quad \text{und} \quad a_3 = b_3$$

Moral: Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie in allen skalaren Komponenten übereinstimmen.

Vektoraddition

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \\ &= a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + b_3\vec{e}_3 \\ &= (a_1 + b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vektorsubtraktion

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - \big(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\big) \\ &= a_1\vec{e}_1 - b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 - b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - b_3\vec{e}_3 \\ &= (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Skalare Multiplikation

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \vec{a} &= \alpha \cdot \big(a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3\big) \\ &= \alpha \cdot a_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha \cdot a_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha \cdot a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Spezialfälle

$$(-1) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

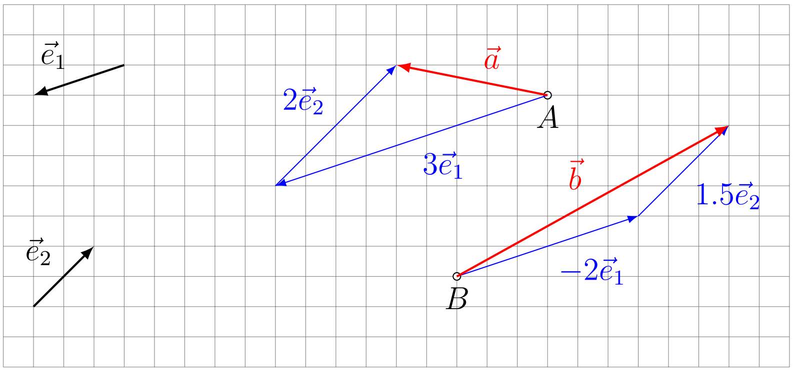
$$\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.5 Beispiele

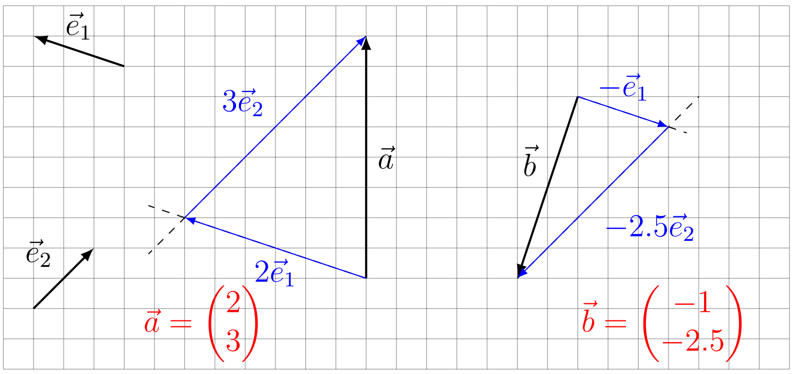
Komponentendarstellung auswerten

Zeichne Repräsentanten von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, die in den Punkten A bzw. B beginnen.



Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha - 1.5\beta &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen ($\alpha = 1.5\beta$, mit β beliebig)

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear

Komplanarität untersuchen

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ komplanar?

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind komplanar (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = \gamma = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & -7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{„nur“}}{\Rightarrow} \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind *nicht* komplanar (linear *un*abhängig).

Zerlegung von Vektoren

Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dar.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{TR}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} \alpha = 3 \\ \beta = 14 \\ \gamma = 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 3\vec{a} + 14\vec{b} + 5\vec{c}$$

Vektorgleichungen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Löse $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} - 7\vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$ nach $\vec{v}$ auf.

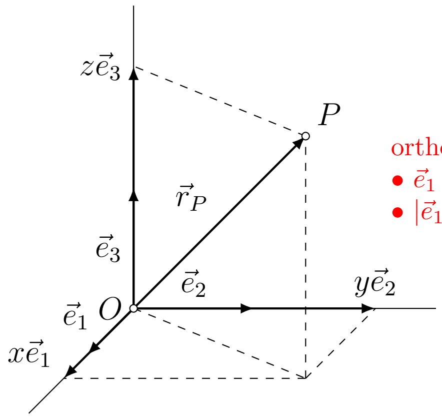
Gleichung nach $\vec{v}$ auflösen: (das ist hier einfach!)

$\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c} + 7\vec{d}$

$$= -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

4 Ortsvektoren



orthonormiert:
- $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ und $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$ und $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$
- $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

Drei orthonormierte Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ und eine Punkt O (Origo, Ursprung, Nullpunkt) definieren ein rechtwinkliges (kartesisches) Koordinatensystem des Raumes.

Zu jedem Punkt P gibt es einen Ortspfeil $\overrightarrow{OP}$. Dieser ist abhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\overrightarrow{OP}$ ist Repräsentant eines Vektors. Dieser heisst *Ortsvektor* von P und wird mit $\vec{r}_P$ bezeichnet.

$\vec{r}_P$ kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

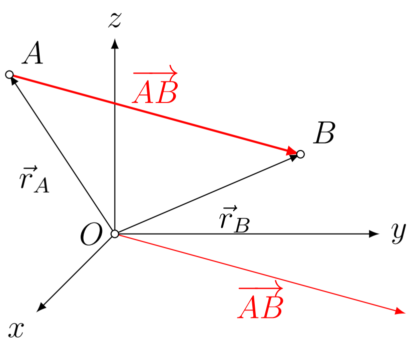
$$\vec{r}_P = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P(x, y, z)$$

Merke: Die Koordinaten des Punktes P sind die die Komponenten des zughörigen Ortsvektors $\vec{r}_P$

Vektor zwischen zwei Punkten

Gegeben: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

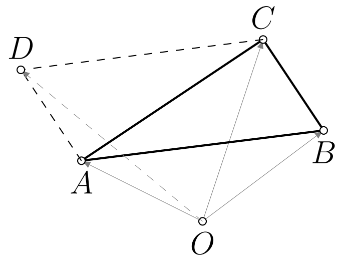
Gesucht: $\overrightarrow{AB} = ?$



$\overrightarrow{AB} = -\vec{r}_A + \vec{r}_B = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ („Endpunkt minus Anfangspunkt“)

Beispiel

Ergänze das Dreieck mit $A(0,-1,2)$, $B(5,1,1)$ und $C(-2,3,0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.

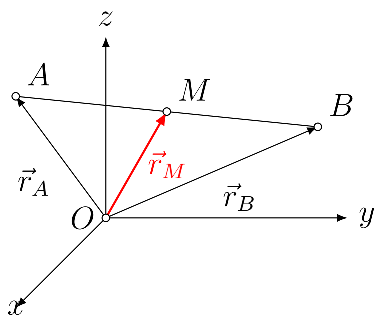


$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad D(-7,1,1)$

4.1 Schwerpunkte

Mittelpunkt einer Strecke



$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{1}{2}(-\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \vec{r}_A - \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B$$
$$= \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

Beispiel

$M(4,-3,2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(-1,5,7)$. Bestimme B.

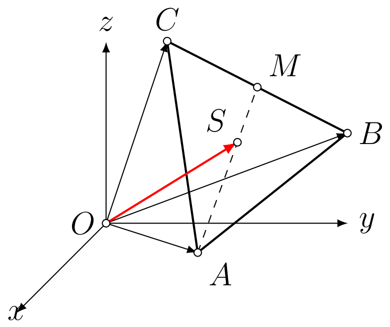
$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_B = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B(9,-11,-3)$$

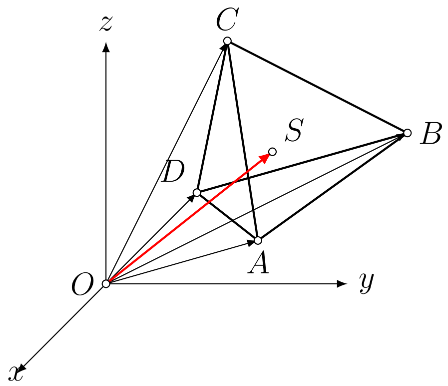
Schwerpunkt eines Dreiecks



$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_M - \vec{r}_A) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) - \vec{r}_A\right)$$

$$= \vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_C - \frac{2}{3}\vec{r}_A = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$$

Schwerpunkt eines Tetraeders



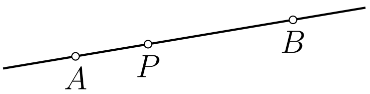
Analog zur Strecke und zum Dreieck erhält man:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D)$$

4.2 Teilung einer Strecke

Innere Teilung

Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *innen* im Verhältnis $|AP| : |PB| = 1 : 2$?



$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{(Vorsicht!)}$$

$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = \frac{1}{3}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \frac{1}{3}\vec{r}_B - \frac{1}{3}\vec{r}_A \quad || + \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_P = \frac{2}{3}\vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{r}_B = \frac{1}{3}(2\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

Beispiel

Die Strecke AB mit $A(-9,4,7)$ und $B(6,-1,2)$ soll innen im Verhältnis $2:3$ geteilt werden. Bestimme den Teilungspunkt P.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AB} \quad \text{(Vorsicht!)}$$

$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = \frac{2}{5}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \frac{2}{5}\vec{r}_B - \frac{2}{5}\vec{r}_A \quad || + \vec{r}_A$$

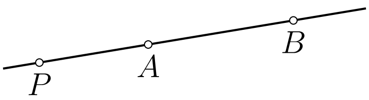
$$\vec{r}_P = \frac{3}{5}\vec{r}_A + \frac{2}{5}\vec{r}_B = \frac{1}{5}\left[3\vec{r}_A + 2\vec{r}_B\right]$$

$$\vec{r}_P = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix}-27\\12\\21\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\-2\\4\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-15\\10\\25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$$

innerer Teilungspunkt: $P(-3,2,5)$

Äussere Teilung

Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *aussen* im Verhältnis $|AP|:|PB| = 1:3$?



$$\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{(Vorsicht!)}$$

$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = -\frac{1}{2}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -\frac{1}{2}\vec{r}_B + \frac{1}{2}\vec{r}_A \quad || + \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_P = \frac{3}{2}\vec{r}_A - \frac{1}{2}\vec{r}_B = \frac{1}{2}\left(3\vec{r}_A - \vec{r}_B\right)$$

Beispiel

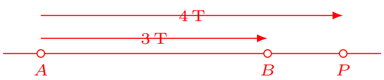
Zeige, dass $P(0,-1,3)$ die Strecke AB mit $A(-8,3,-5)$ und $B(-2,0,1)$ aussen teilt und bestimme das Teilungsverhältnis.

$$\overrightarrow{AP} = k\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = k(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

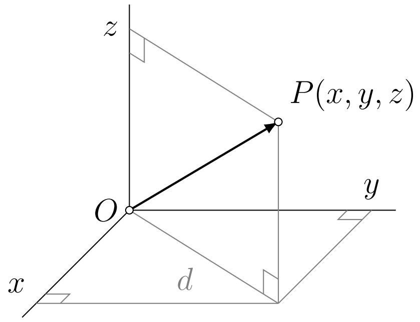
$$\begin{pmatrix}8\\-4\\8\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4}{3}$$

Lösung existiert: P teilt die Strecke AB



$|AP|:|PB| = 4:1$

4.3 Abstand eines Punktes vom Ursprung

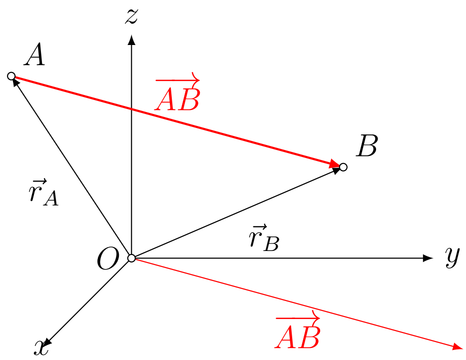


Satz des Pythagoras:

$d^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{d^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

analog für mehr als 3 Komponenten: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

4.4 Länge einer Strecke bzw. eines Vektors



Gegeben: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

Gesucht: $|\overrightarrow{AB}| = ?$

$$|\overrightarrow{AB}| = |-\vec{r}_A + \vec{r}_B| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \left| \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

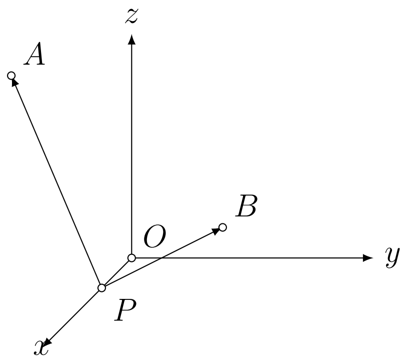
Beispiel

Gegeben sind die Punkte $A(-1,5,2)$ und $B(2,0,3)$. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{3^2+(-5)^2+1^2} = \sqrt{35}$$

Abstandsaufgabe

Gesucht ist ein Punkt P auf der x-Achse, der von $A(-5,10,8)$ doppelt so weit entfernt ist wie vom Punkt $B(2,-4,6)$



Unbekannter Punkt auf der x-Achse: $P(x,0,0)$

$$|\overrightarrow{AP}| = 2\cdot|\overrightarrow{BP}|$$

$$\left|\begin{pmatrix}x+5\\-10\\-8\end{pmatrix}\right| = 2\cdot\left|\begin{pmatrix}x-2\\4\\-6\end{pmatrix}\right|$$

$$\sqrt{(x+5)^2+(-10)^2+(-8)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2+4^2+(-6)^2}$$

$$\sqrt{(x+5)^2+100+64} = 2\sqrt{(x-2)^2+16+36}$$
$$\sqrt{x^2+10x+25+100+64} = 2\sqrt{x^2-4x+4+16+36}$$

$$\sqrt{x^2+10x+189} = 2\sqrt{x^2-4x+56}$$

$$x^2+10x+189 = 4\cdot\left(x^2-4x+56\right)$$

$$x^2+10x+189 = 4x^2-16x+224$$

$$0 = 3x^2-26x+35$$

$$x_1 = \tfrac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad P_1(\tfrac{5}{3},0,0)$$

$$x_2 = 7 \quad\Rightarrow\quad P_2(7,0,0)$$

5 Produkte mit Vektoren

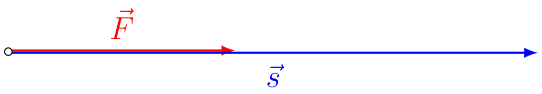
5.1 Die s-Multiplikation

Bereits bekannt: $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$ Skalar · Vektor = Vektor

5.2 Das Skalarprodukt

Wenn eine Kraft einen Körper auf einem bestimmten Weg verschiebt, so verrichtet sie am Körper Arbeit.

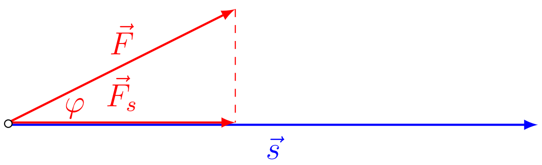
Wenn eine konstante Kraft vom Betrag F einen Körper entlang einer Geraden g um den Weg s verschiebt, so ist die geleistete Arbeit das Produkt aus Kraft und Weg:



$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$ falls $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{s}$

$W = -|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$ falls $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{s}$

Schliesst eine konstante Kraft $\vec{F}$ mit der Wegrichtung einen Winkel von φ ein, so ist die geleistete Arbeit das Produkt aus der Kraft in Wegrichtung $\vec{F}_s$ und dem Weg $\vec{s}$:



$W = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos\varphi \stackrel{\text{Def}}{=} \vec{F} \cdot \vec{s}$ (Fundamentum: S. 84)

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist das Produkt aus den Längen der beiden Vektoren und dem Cosinus des Zwischenwinkels.

Beispiele

(a) $\left|\vec{F}\right| = 3,\ \left|\vec{s}\right| = 5,\ \varphi = 0°;\ W = 15$

(b) $\left|\vec{F}\right| = 3,\ \left|\vec{s}\right| = 5,\ \varphi = 45°;\ W = 10.61$

(c) $\left|\vec{F}\right| = 3,\ \left|\vec{s}\right| = 5,\ \varphi = 90°;\ W = 0$

(d) $\left|\vec{F}\right| = 3,\ \left|\vec{s}\right| = 5,\ \varphi = 135°;\ W = -10.61$

(e) $\left|\vec{F}\right| = 3,\ \left|\vec{s}\right| = 5,\ \varphi = 180°;\ W = -15$

(f) $\left|\vec{F}\right| = 3,\ \left|\vec{s}\right| = 5,\ \varphi = 225°;\ W = -10.61$

(g) $|\vec{F}| = 3$, $|\vec{s}| = 5$, $\varphi = 270°$; $W = 0$

(h) $|\vec{F}| = 3$, $|\vec{s}| = 5$, $\varphi = 315°$; $W = 10.61$

In Zukunft verwenden wir statt $\vec{F}$ und $\vec{s}$ allgemeine Bezeichnungen wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $|\vec{a}| \neq 0$ und $|\vec{b}| \neq 0$ gilt:

- Aus $\vec{a} \perp \vec{b}$ folgt:

  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$

- Aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ folgt:

  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90°$

Skalarprodukt in Komponentenform

Die Definition des Skalarprodukts ist unpraktisch, wenn die Vektoren in der Komponentenschreibeweise gegeben sind. Daher leiten wir jetzt für diesen Fall eine zweite, gleichwertige Berechnungsvorschrift für das Skalarprodukt her.

Zur Erinnerung: Eine orthonormierte Basis in einem n-dimensionalen Vektorraum ist eine Folge von n Vektoren, die jeweils paarweise senkrecht aufeinander stehen und alle die Länge 1 haben.

Ist $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ eine orthonormierte Basis des dreidimensionalen Raumes, so gilt:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_1| \cdot \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_2| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$$

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = |\vec{e}_3| \cdot |\vec{e}_3| \cdot \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \cos 90° = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = |\vec{e}_2| \cdot |\vec{e}_3| \cdot \cos 90° = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$$

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}_3| \cdot |\vec{e}_1| \cdot \cos 90° = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$$

Für $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ und $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\
&= a_1\vec{e}_1\cdot b_1\vec{e}_1 + a_1\vec{e}_1\cdot b_2\vec{e}_2 + a_1\vec{e}_1\cdot b_3\vec{e}_3 \\
&\quad + a_2\vec{e}_2\cdot b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2\cdot b_2\vec{e}_2 + a_2\vec{e}_2\cdot b_3\vec{e}_3 \\
&\quad + a_3\vec{e}_3\cdot b_1\vec{e}_1 + a_3\vec{e}_3\cdot b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3\cdot b_3\vec{e}_3 \\
&= a_1b_1\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + a_1b_2\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + a_1b_3\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 \\
&\quad + a_2b_1\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + a_2b_2\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + a_2b_3\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 \\
&\quad + a_3b_1\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 + a_3b_2\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 + a_3b_3\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 \\
&= a_1b_1 + 0 + 0 + 0 + a_2b_2 + 0 + 0 + 0 + a_3b_3 \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned}$$

Skalarprodukt in Komponentendarstellung:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Beispiele

Gegeben sind: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

(a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1\cdot 4 + 5\cdot 3 + 6\cdot 9 = -4 + 15 + 54 = 65$

(b) $\vec{b}\cdot\vec{a} = 4\cdot(-1) + 3\cdot 5 + 9\cdot 6 = \cdots = 65$

(c) $\vec{a}\cdot\vec{a} = (-1)\cdot(-1) + 5\cdot 5 + 6\cdot 6 = 1 + 25 + 36 = 62 \quad \big(|\vec{a}|^2\big)$

(d) $\vec{b}\cdot\vec{c} = 4\cdot(-2) + 3\cdot 8 + 9\cdot(-7) = -8 + 24 - 63 = -47$

(e) $\vec{a}\cdot\vec{c} = (-1)\cdot(-2) + 5\cdot 8 + 6\cdot(-7) = 2 + 40 - 42 = 0 \quad (\vec{a}\perp\vec{c})$

5.3 Winkel zwischen zwei Vektoren

Mit Hilfe der beiden Vorschriften für das Skalarprodukt erhalten wir eine Formel zur Berechnung des Zwischenwinkels:

$$\underbrace{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi}_{\vec{a}\cdot\vec{b}} = \underbrace{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}_{\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Zwischenwinkelformel: $\varphi = \arccos \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Beispiele: Berechne die Zwischenwinkel φ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Gradmass.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \varphi = \arccos \dfrac{5}{3 \cdot 5} = 70.53°$

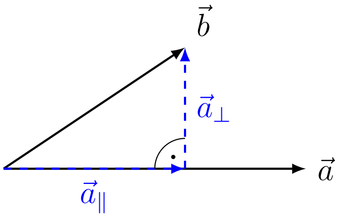
(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \varphi = \arccos \dfrac{0}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{33}} = 90°$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \varphi = \arccos \dfrac{-3}{\sqrt{11} \cdot 1} = 154.76°$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \varphi = \arccos \dfrac{-2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 180°$

5.4 Zerlegung eines Vektors

Zerlege den Vektor $\vec{b}$ in eine zu $\vec{a}$ kollineare Komponente $\vec{a}_{\|}$ und eine zu $\vec{a}$ orthogonale Komponente $\vec{a}_{\perp}$.



$\vec{a}_{\|} = k \cdot \vec{a}$

$\vec{a}_{\perp} = -\vec{a}_{\|} + \vec{b} = \vec{b} - k \cdot \vec{a}$

$\vec{a} \cdot \vec{a}_{\perp} = 0$ (Das ist einfacher als $\vec{a}_{\|} \cdot \vec{a}_{\perp} = 0$.)

$\vec{a} \cdot (\vec{b} - k \cdot \vec{a}) = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} - k \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} = 0$

$$k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$\vec{a}_{\|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \cdot \vec{a}$$

Achtung: Die Faktoren der Skalarprodukte dürfen nicht gekürzt werden.

Beispiel

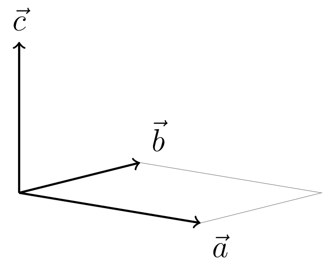
Stelle den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix}$ als Liniearkombination von $\vec{a}_{\|}$ und $\vec{a}_{\perp}$ dar, die parallel bzw. senkrecht zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind.

$$\vec{a}_{\|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \cdot \vec{a} = \frac{-42}{14} \cdot \vec{a} = -3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{b} - \vec{a}_{\|} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

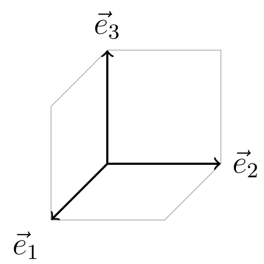
5.5 Das Vektorprodukt

Das *Vektorprodukt* (oder *Kreuzprodukt*) $\vec{a} \times \vec{b}$ aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist ein Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$, der durch die folgenden drei Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:



- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $|\vec{c}|$ ist die Flächenmasszahl des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
- Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein *Rechtssystem*.

Die Vektorprodukte der Basisvektoren



$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$
$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}$	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$
$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$

Offensichtlich gilt das Kommutativgesetz nicht!

Setzen wir (ohne Beweis) das Distributivgesetz und die Verträglichkeit des Vektorproduktes mit der s-Multiplikation voraus, so gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3\right) \times \left(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\right)$$

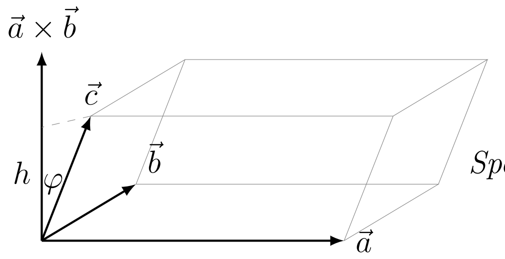
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = {} & a_1b_1 \cdot \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1\right) + a_1b_2 \cdot \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\right) + a_1b_3 \cdot \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3\right) + \\ & a_2b_1 \cdot \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1\right) + a_2b_2 \cdot \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2\right) + a_2b_3 \cdot \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\right) + \\ & a_3b_1 \cdot \left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1\right) + a_3b_2 \cdot \left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2\right) + a_3b_3 \cdot \left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} = {} & a_1b_1 \cdot \vec{0} + a_1b_2 \cdot \vec{e}_3 - a_1b_3 \cdot \vec{e}_2 \\
& - a_2b_1 \cdot \vec{e}_3 + a_2b_2 \cdot \vec{0} + a_2b_3 \cdot \vec{e}_1 \\
& + a_3b_1 \cdot \vec{e}_2 - a_3b_2 \cdot \vec{e}_1 + a_3b_3 \cdot \vec{0} \\
= {} & a_1b_2 \cdot \vec{e}_3 - a_1b_3 \cdot \vec{e}_2 - a_2b_1 \cdot \vec{e}_3 \\
& + a_2b_3 \cdot \vec{e}_1 + a_3b_1 \cdot \vec{e}_2 - a_3b_2 \cdot \vec{e}_1 \\
= {} & (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3
\end{aligned}
$$

Also: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

5.6 Das Spatprodukt

Wie gross ist das Volumen eines *Spats*, der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird?



Spat oder *Parallelepiped*

$G = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$\frac{h}{|\vec{c}|} = |\cos\varphi| \quad \Rightarrow \quad h = |\vec{c}| \cdot |\cos\varphi|$

$V = G \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos\varphi| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \stackrel{\text{Def.}}{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ Spatprodukt oder gemischtes Produkt

- Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$, so bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*.
- Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$, so bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein *Linkssystem*.
- Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, so sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.

Beispiel

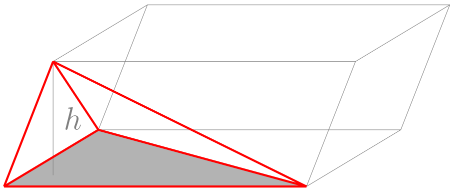
Berechne das Volumen des Spats, der von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 27 - 12 - 30 = -15 \text{ (Linkssystem)}$$

$$V = 15\,\text{VE}$$

Das Volumen eines Tetraeders



$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{3} \cdot G_{\text{Tetraeder}} \cdot h_{\text{Tetraeder}}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot G_{\text{Spat}} \cdot h_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Spat}}$$

Beispiel

Berechne das Volumen des Tetraeders, das von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

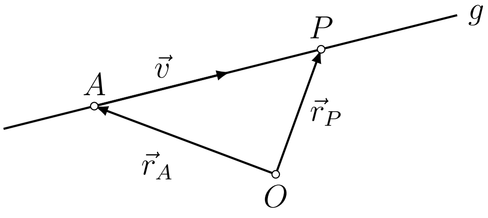
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ -25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 60 - 34 - 50 = -24$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4\,\text{VE}$$

6 Die Gerade

6.1 Die Parametergleichung der Gerade



Die Gerade g ist festgelegt durch den Punkt A und einen Richtungsvektor $\vec{v}$. Für einen beliebigen Punkt P gilt:

$$\begin{aligned} P \in g \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \quad -\vec{r}_A + \vec{r}_P = t \cdot \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{r}_P = \vec{r}_A + t \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Die Zahl t wird Parameter genannt.

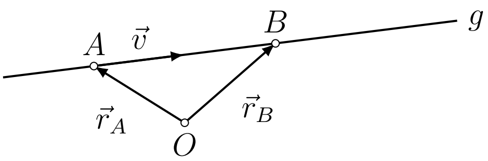
$P(x, y, z) \in g \Leftrightarrow$ Es gibt einen Wert für t, der die Parametergleichung erfüllt:

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

6.2 Erste Anwendungen der Geradengleichung

Beispiel 6.2.1

Bestimme eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte $A(-4, 1, 5)$ und $B(2, -1, 1)$.



$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.2.2

Gegeben: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Welche Punkte gehören zu den Parameterwerten?

- $t = 0$: $P(5, 9, -4)$
- $t = 3$: $Q(14, 3, -1)$
- $t = -1$: $R(2, 11, -5)$

Beispiel 6.2.3

Gegeben: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Welche der folgenden Punkte liegen auf g?

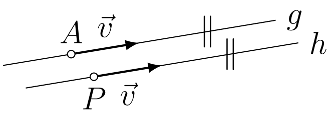
- $S(-1, 0, 3)$: $\begin{aligned} -1 &= -4 + 3t \\ 0 &= 1 - t \\ 3 &= 5 - 2t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= 1 \\ t &= 1 \\ t &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad S \in g$

- $T(-10, 3, 1)$: $\begin{aligned} -10 &= -4 + 3t \\ 3 &= 1 - t \\ 1 &= 5 - 2t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= -2 \\ t &= -2 \\ t &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad T \notin g$

Bestimme eine Gleichung der Geraden h, die parallel zu

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

verläuft und durch den Punkt $P(-7, 8, 11)$ geht.

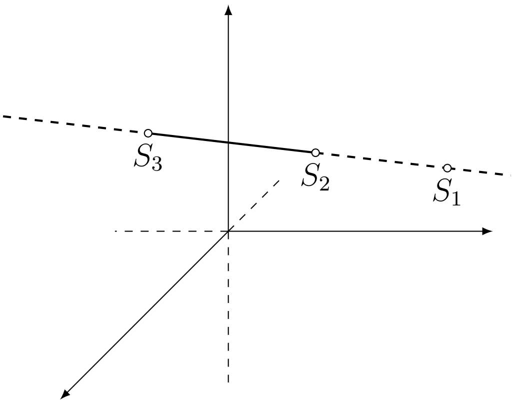


Der Richtungsvektor von g ist auch ein Richtungsvekor von h:

$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

6.3 Spurpunkte

Die Spurpunkte S_1, S_2, S_3 einer Geraden g sind die Schnittpunkte von g mit den Koordinatenebenen π_1 (xy-Ebene), π_2 (yz-Ebene) und π_3 (zx-Ebene).



Beispiel 6.3.1

Bestimme den ersten Spurpunkt der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$g \cap \pi_1 = S_1(x, y, 0)$:

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2t \\ y &= -3 + 3t \quad \Rightarrow \quad t = -2 \quad \Rightarrow \quad S_1(8, -9, 0) \\ 0 &= 6 + 3t \end{aligned}$$

Beispiel 6.3.2

Bestimme den zweiten Spurpunkt der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$g \cap \pi_2 = S_2(0, y, z)$:

$$\begin{aligned} 0 &= 4 + 0t \\ y &= 3 + 5t \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung} \quad \Rightarrow \quad \text{kein Spurpunkt} \\ z &= -8 + 2t \end{aligned}$$

Beispiel 6.3.3

Bestimme den dritten Spurpunkt der Geraden

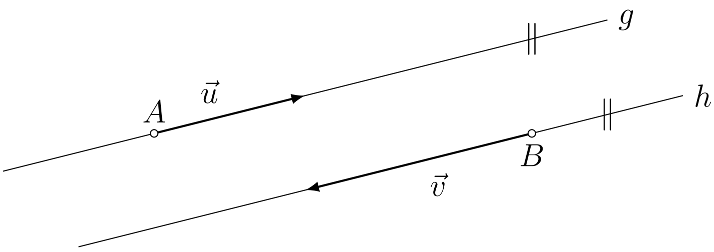
$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$g \cap \pi_3 = S_3(x, 0, z)$:

$$\begin{aligned} x &= 4 + 2t \\ 0 &= 0 + 0t \quad \Rightarrow \quad \text{jedes } t \in \mathbb{R} \text{ ist Lösung} \quad \Rightarrow \quad g \subset \pi_3 \\ z &= 3 + 5t \end{aligned}$$

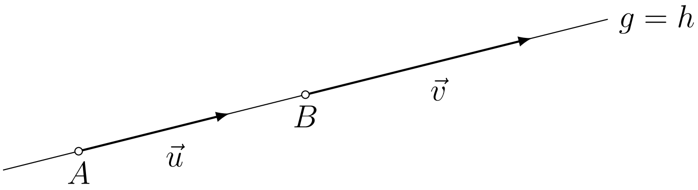
6.4 Gegenseitige Lage von Geraden

Parallele Geraden



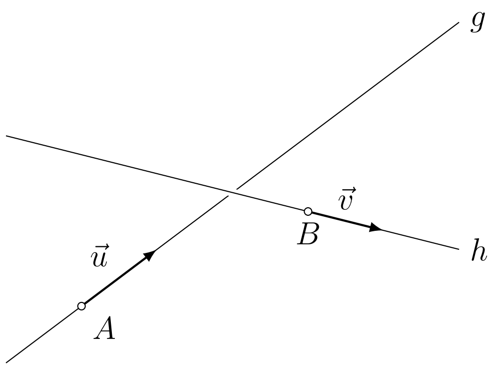
- kollineare Richtungsvektoren
- kein gemeinsamer Punkt

Zusammenfallende Geraden



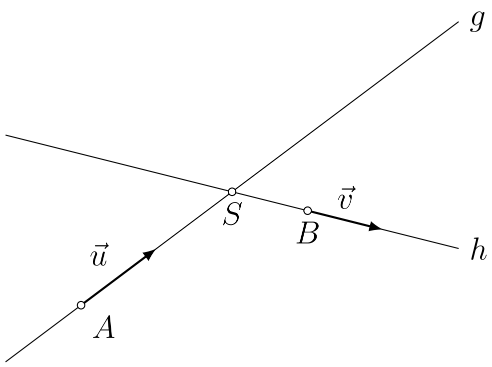
- kollineare Richtungsvektoren
- ein gemeinsamer Punkt (und damit unendlich viele)

Windschiefe Geraden



- keine kollinearen Richtungsvektoren
- kein gemeinsamer Punkt

Schneidende Geraden



- keine kollinearen Richtungsvektoren
- ein gemeinsamer Punkt

Zusammenfassung

	RV kollinear	RV nicht kollinear
ein gemeinsamer Punkt	identisch	schneidend
kein gemeinsamer Punkt	parallel	windschief

Beispiel 6.4.1

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren: kollinear, denn $\vec{v}_h = -1.5 \cdot \vec{v}_g$

$A(3,2,1) \in h$? [oder: $B(1,0,5) \in g$?]

$$\begin{array}{l} 3 = 1 + 6t \\ 2 = 0 - 12t \\ 1 = 5 - 3t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} t = 1/3 \\ t = -1/6 \\ t = 4/3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A \notin h \quad \Rightarrow \quad g \parallel h$$

Beispiel 6.4.2

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$g \cap h$?

$$\begin{array}{r} 9 - 2s = 7 + 2t \\ -2 + s = 2 - 2t \\ 3 - 9s = 6 + 5t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} -2s - 2t = -2 \\ s + 2t = 4 \\ -9s - 5t = 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} s = -2 \\ t = 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad g \cap h = S(13, -4, 21)$$

Beispiel 6.4.3

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren: kollinear, denn $\vec{v}_g = (-2) \cdot \vec{v}_h$

$A(2,3,8) \in h$?

$$\begin{array}{l} 2 = -6 - 2t \\ 3 = 15 + 3t \\ 8 = -4 - 3t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 8 = -2t \\ -12 = 3t \\ 12 = -3t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} t = -4 \\ t = -4 \\ t = -4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad g = h$$

Beispiel 6.4.4

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren: nicht kollinear

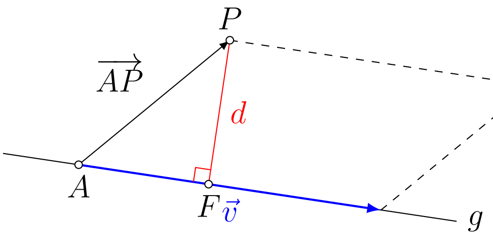
$g \cap h$?

$$\begin{aligned} -1 + 7s &= 11 - t \\ 4 - 2s &= 20 + 8t \\ 8 + 6s &= 24 + 4t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 7s + t &= 12 \\ -2s - 8t &= 16 \\ 6s - 4t &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$\Rightarrow \quad g$ und h sind *windschief*

6.5 Abstandsberechnungen mit Geraden

Abstand Punkt–Gerade



Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms auf zwei Arten:

$$d \cdot |\vec{v}| = |\vec{v} \times \overrightarrow{AP}| \quad \Rightarrow \quad d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$$

Beispiel 6.5.1

Bestimme den Abstand d des Punktes $P(8, 9, 8)$ von der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den Fusspunkt F des Lots von P auf g.

$$d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{9}{3} = 3$$

Fusspunkt F: $\vec{r}_F = \vec{r}_A + k \cdot \vec{v}$

$$\overrightarrow{FP} \cdot \vec{v} = 0$$

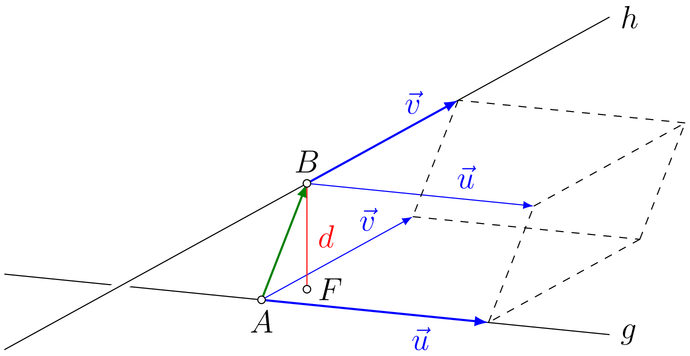
$$\left(-k \cdot \vec{v} + \overrightarrow{AP}\right) \cdot \vec{v} = 0$$

$$-k \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0$$

$$k = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\vec{r}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(7, 11, 6)$$

Abstand windschiefer Geraden



$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| \cdot d = \left|\,(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AB}\,\right| \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\,(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AB}\,\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\,\right|}$$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ spannen einen Spat auf.

Die Geraden g und h liegen in parallelen Ebenen, welche gleichzeitig auch die Grund- und die Deckfläche des Spates enthalten.

Der Abstand d der Geraden ist gleich dem Abstand dieser Ebenen und somit gleich der Höhe des Spates.

Beispiel 6.5.1

Bestimme den Abstand der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -21 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix}$$

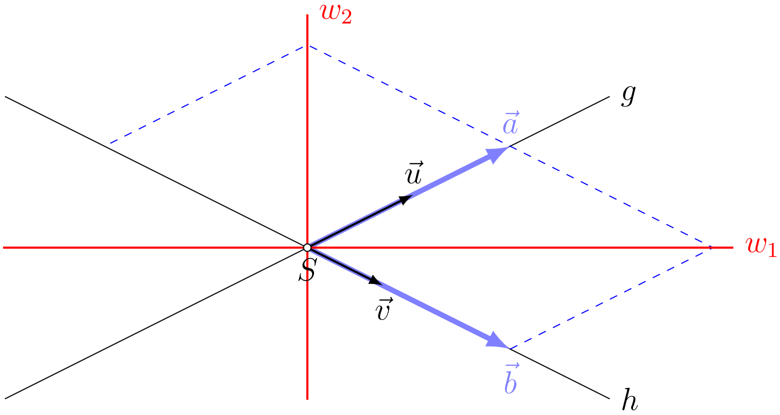
$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$d(g,h) = \frac{\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -20 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -24 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -20 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix} \right|} = \frac{684}{38} = 18$$

6.6 Die Winkelhalbierenden zweier Geraden

Gegeben: zwei sich schneidende Geraden g und h

Gesucht: Gleichungen der Winkelhalbierenden



Idee: Sind Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von g und h gleich lang, so spannen sie zwei (kongruente) Rhomben auf.

Die Diagonalen dieser Rhomben sind die gesuchten Winkelhalbierenden:

$$w_1\colon \vec{r} = \vec{r}_S + t_1(\vec{a} + \vec{b})$$

$$w_2\colon \vec{r} = \vec{r}_S + t_2(\vec{a} - \vec{b})$$

Beispiel 6.6.1

Gesucht: Gleichungen der Winkelhalbierenden der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: $S(1, 2, 3)$ [offensichtlich]

$|\vec{u}| = 3$

$|\vec{v}| = 5$

$$\vec{a} = 5\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$w_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -22 \end{pmatrix}$$

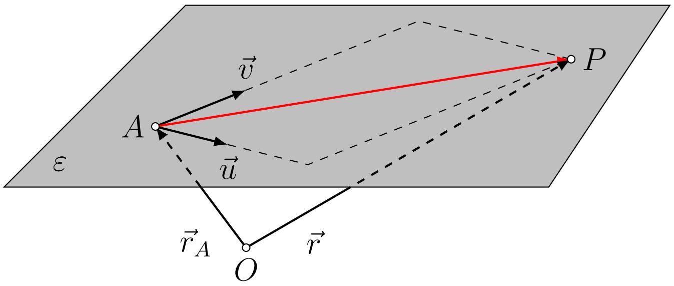
7 Die Ebene

7.1 Die verschiedenen Formen der Ebenengleichung

Die Parameterform

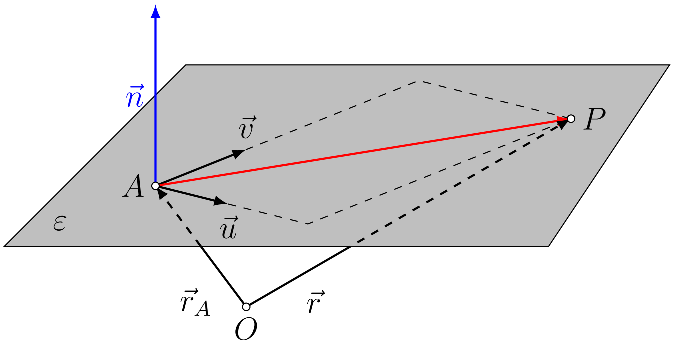
Gegeben: Ein Punkt A sowie zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

$\vec{r}$ ist der zum Punkt $P(x, y, z)$ gehörende Ortsvektor.



$\varepsilon\colon \vec{r} = \vec{r}_A + s\vec{u} + t\vec{v}$ Parameterform

Die Normalenform



$\vec{n} \neq \vec{0}$ ist ein Normalenvektor von ε $\big($z. B. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}\big)$

$$P \in \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \perp \overrightarrow{AP} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0$$

Die Koordinatenform

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0 \quad \text{Normalenform}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r}_A = 0$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z \underbrace{- n_1 a_1 - n_2 a_2 - n_3 a_3}_{D} = 0$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z + D = 0 \quad \text{Koordinatenform}$$

Beispiel (a)

Gegeben: Punkte $A(2,-3,0)$, $B(5,3,1)$, $C(4,5,2)$

Gesucht: Parameterform der Ebene durch A, B und C

Parameterform: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{v}$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (b)

Gegeben: Punkte $A(2,-3,0)$, $B(5,3,1)$, $C(4,5,2)$

Gesucht: Normalenform der Ebene durch A, B und C

Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Beispiel (c)

Gegeben: Punkte $A(2,-3,0)$, $B(5,3,1)$, $C(4,5,2)$

Gesucht: Koordinatenform der Ebene durch A, B und C

$$D = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -5$$

Merke: Die Komponenten eines Normalenvektors einer Ebene sind gleichzeitig Koeffizienten der Koordinatengleichung dieser Ebene.

$\varepsilon\colon x - y + 3z - 5 = 0$

Beispiel (d)

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene ε, die durch $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $P(4,4,1)$ definiert ist.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$D = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -24$

$\varepsilon\colon 2x + 5y - 4z - 24 = 0$

Beispiel (e)

Wann ist ein Ebene durch 2 Geraden definiert?

Wenn die beiden Geraden parallel sind oder sich schneiden.

Beispiel (f)

Wie lauten die Koordinatengleichungen der Koordinatenebenen π_1, π_2 und π_3?

$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von π_1 (xy-Ebene).

Somit lautet die Koordinatengleichung $0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + D = 0$

Da $(0,0,0)$ in π_1 liegt, folgt daraus $D = 0$ und $\pi_1\colon z = 0$

Analog folgen $\pi_2\colon x = 0$ und $\pi_3\colon y = 0$

7.2 Erste Anwendungen der Ebenengleichung

Liegt der Punkt $P(10, 2, 4.5)$ in der Ebene

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} ?$$

$$\begin{aligned} 10 &= -10 + 2s + 5t \\ 2 &= 9 - 4s + t \\ 4.5 &= 12 + 3s - 5t \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2s + 5t &= 20 \\ -4s + t &= -7 \\ 3s - 5t &= -7.5 \end{aligned}$$

Lösung: $s = 2.5,\ t = 3 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$

Liegt der Punkt $P(5, -2, 16)$ in der Ebene $\varepsilon\colon 4x + 3y - z + 1 = 0$?

$4 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) - 16 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \notin \varepsilon$

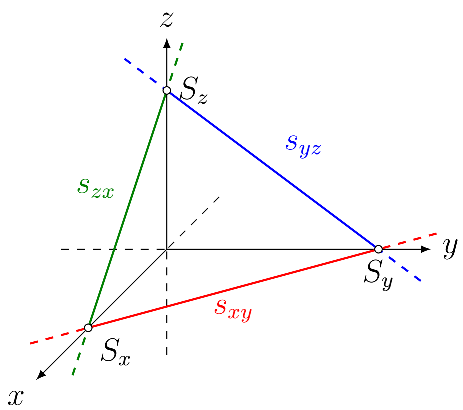
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene δ, die durch den Punkt $P(1, 2, -3)$ geht und parallel zur Ebene $\varepsilon\colon -8x + 2y - 3z + 1 = 0$ liegt.

$$\vec{n}_\delta = \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$D = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = -5$

$\delta\colon -8x + 2y - 3z - 5 = 0$

7.3 Achsenabschnitte und Spurgeraden



Achsenabschnitte: S_x, S_y, S_z

Spurgeraden: s_{xy}, s_{yz}, s_{zx}

Beispiel

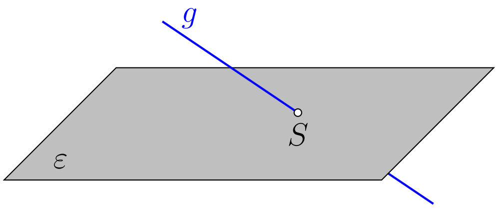
Bestimme alle Achsenabschnitte und Spurgeraden der Ebene $\varepsilon\colon 2x - 3y + 5z - 10 = 0$

$S_x(a, 0, 0)$: $2a - 10 = 0 \Rightarrow a = 5$
$S_y(0, b, 0)$: $-3b - 10 = 0 \Rightarrow b = -10/3$
$S_z(0, 0, c)$: $5c - 10 = 0 \Rightarrow c = 2$

s_{xy}: $2x - 3y - 10 = 0 \quad (z = 0)$
s_{yz}: $-3y + 5z - 10 = 0 \quad (x = 0)$
s_{zx}: $2x + 5z - 10 = 0 \quad (y = 0)$

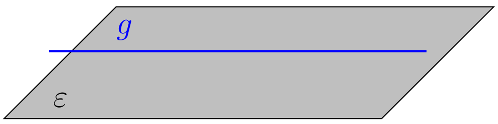
7.4 Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

Ein Schnittpunkt



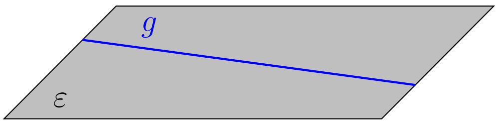
Die Gerade g schneidet die Ebene ε in einem Punkt.

Kein Schnittpunkt



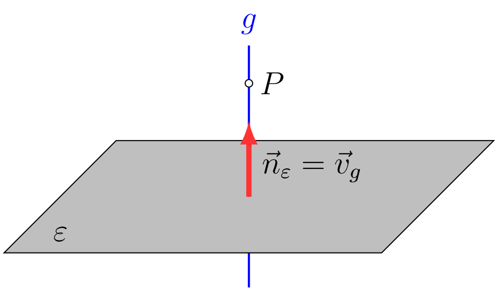
Die Gerade g verläuft parallel zur Ebene ε.

Zwei Schnittpunkte



Die Gerade g liegt in der Ebene ε.

Bestimme eine Gleichung der Geraden g, die senkrecht zur Ebene $\varepsilon\colon x - 2y + 3z - 7 = 0$ steht und durch den Punkt $P(-2, 3, 8)$ geht.



$$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{v}_g \quad \Rightarrow \quad g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In welchem Punkt schneidet die Gerade

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Ebene $\varepsilon\colon 7x - 2y + 3z + 39 = 0$?

Komponenten von g: $x = -2 + 3t$, $y = 4 - t$, $z = 3 + t$

in ε einsetzen:

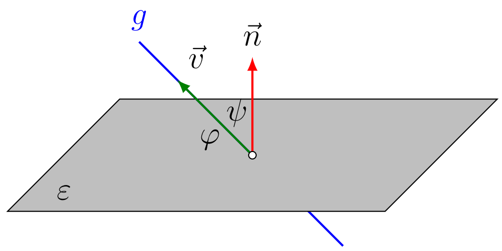
$$\begin{aligned} 7(-2 + 3t) - 2(4 - t) + 3(3 + t) + 39 &= 0 \\ -14 + 21t - 8 + 2t + 9 + 3t + 39 &= 0 \\ 26t + 26 &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

$t = -1$ in g einsetzen: $S(-5, 5, 2)$

In welchem Winkel schneidet die Gerade

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Ebene $\varepsilon\colon x + 2y - 2z + 1 = 0$?

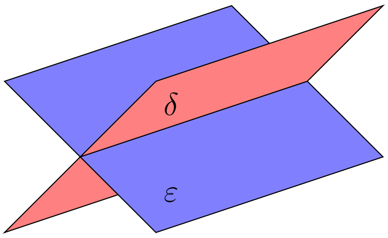


$$\psi = \arccos \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \arccos \frac{4}{3 \cdot 3} = 63.61°$$

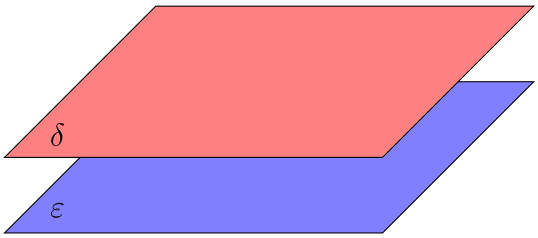
$\varphi = 90° - 63.61° = 26.39°$

oder direkt: $\varphi = \arcsin \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \arcsin \dfrac{4}{3 \cdot 3} = 26.39°$

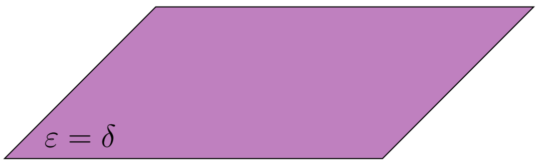
7.5 Gegenseitige Lage von Ebenen



schneidend



parallel



zusammenfallend

	NV kollinear	NV nicht kollinear
einen Schnittpunkt	zusammenfallend	schneidend
keinen Schnittpunkt	parallel	—

Untersuche die gegenseitige Lage der Ebenen ε und δ. Falls sich die Ebenen schneiden berechne den Schnittwinkel und eine Gleichung der Schnittgeraden.

Beispiel (a)

$\varepsilon\colon 6x - 8y + 4z + 9 = 0$
$\delta\colon 9x - 12y + 6z - 7 = 0$

$$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 1.5 \cdot \vec{n}_\varepsilon = \vec{n}_\delta \text{ (kollinear)}$$

Wären die Ebenen identisch, so müsste $1.5 \cdot \varepsilon = \delta$ gelten, was offenbar nicht der Fall ist.

$\Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

Beispiel (b)

$\varepsilon\colon 2x + 2y + 3z + 8 = 0$
$\delta\colon 5x + 2y + 4z + 7 = 0$

$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind nicht kollinear.

$\Rightarrow \varepsilon$ und δ schneiden sich.

Richtungsvektor der Schnittgeraden:

$$\vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Hilfsebene durch $(0,0,0)$ und senkrecht zu $\vec{v}$:

$\zeta\colon 2x + 7y - 6z = 0$

$$\begin{aligned} &2x + 2y + 3z = -8 \\ &5x + 2y + 4z = -7 \qquad \Rightarrow \qquad S(1,-2,-2) \\ &2x + 7y - 6z = 0 \end{aligned}$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(spitzer) Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|} = \arccos \frac{26}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{45}} \approx 19.94^\circ$$

Beispiel (c)

$\varepsilon\colon 4x + 2y - 2z + 6 = 0$
$\delta\colon\; -2x - y + z - 3 = 0$

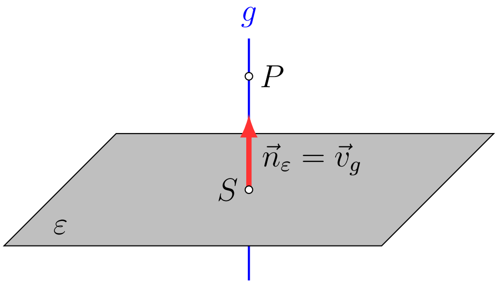
Wegen $-2 \cdot \delta = \varepsilon$ gilt $\varepsilon = \delta$.

7.6 Abstandsberechnungen

Abstand Punkt–Ebene

Gegeben: $P(x_P, y_P, z_P)$ und $\varepsilon\colon n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z + d = 0$

Gesucht: $P\varepsilon = \operatorname{dist}(P, \varepsilon)$



Normale g auf ε durch P: $\vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{n}$ $\quad g \cap \varepsilon = \{S\}$:

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}_A\right) &= 0 \quad (A \in \varepsilon)\\
\vec{n} \cdot \left(\vec{r}_P + t\vec{n}\right) - \vec{n} \cdot \vec{r}_A &= 0\\
\vec{n} \cdot \vec{r}_P + t\vec{n} \cdot \vec{n} - \vec{n} \cdot \vec{r}_A &= 0\\
t\vec{n} \cdot \vec{n} &= \vec{n} \cdot \vec{r}_A - \vec{n} \cdot \vec{r}_P\\
t &= \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_A - \vec{n} \cdot \vec{r}_P}{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \frac{-\vec{n} \cdot \left(\vec{r}_P - \vec{r}_A\right)}{|\vec{n}\,|^2}
\end{aligned}$$

$$P\varepsilon = PS = \left|t\vec{n}\right| = |t| \cdot \left|\vec{n}\right| = \frac{\left|\vec{n} \cdot \left(\vec{r}_P - \vec{r}_A\right)\right|}{|\vec{n}|}$$

$$P\varepsilon = \frac{|n_1 x_P + n_2 y_P + n_3 z_P + d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad \text{Hessesche Normalform}$$

Beispiel (a)

Berechne den Abstand $P\varepsilon$ vom Punkt $P(5, 2, 1)$ zur Ebene $\varepsilon\colon x + 4y + 8z + 1 = 0$.

$\vec{n}_\varepsilon = (1, 4, 8)^{\mathrm{T}}$

$$P\varepsilon = \frac{|1 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2}} = \frac{22}{9}$$

Ohne Betragzeichen lässt sich $P\varepsilon$ wie folgt deuten:

falls $P\varepsilon > 0$: P liegt im Halbraum in Richung von $\vec{n}_\varepsilon$.

falls $P\varepsilon < 0$: P liegt im Halbraum in Richtung von $-\vec{n}_\varepsilon$.

Beispiel (b)

Gesucht: Abstand des Punktes $P(5, -1, 3)$ von der Ebene $\varepsilon\colon 9x + 20y + 12z + 14 = 0$

$$P\varepsilon = \frac{|9 \cdot 5 + 20 \cdot (-1) + 12 \cdot 3 + 14|}{\sqrt{9^2 + 20^2 + 12^2}} = \frac{75}{25} = 3$$

Beispiel (c)

Abstand des Ebene $\varepsilon\colon 4x - 10y + 3z - 25 = 0$ vom Ursprung.

$$P\varepsilon = \frac{|4 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 25|}{\sqrt{16 + 100 + 9}} = \frac{25}{\sqrt{125}} = \sqrt{5}$$

Beispiel (d)

Liegen die Punkte $P_1(0, 1, -9)$ und $P_2(-1, -3, 8)$ im gleichen Halbraum der Ebene $\varepsilon\colon 3x + 12y - 4z + 1 = 0$?

$$\left.\begin{aligned} P_1\varepsilon &= \frac{0 + 12 + 36 + 1}{\sqrt{9 + 144 + 16}} = \frac{49}{13} > 0 \\ P_2\varepsilon &= \frac{-3 - 36 - 32 + 1}{\sqrt{9 + 144 + 16}} = \frac{-70}{13} < 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Nein}$$

Abstand paralleler Ebenen

Weise nach, dass die Ebenen $\varepsilon_1\colon 2x - 2y + z - 7 = 0$ und $\varepsilon_2\colon 4x - 4y + 2z + 2 = 0$ parallel sind und bestimme ihren Abstand.

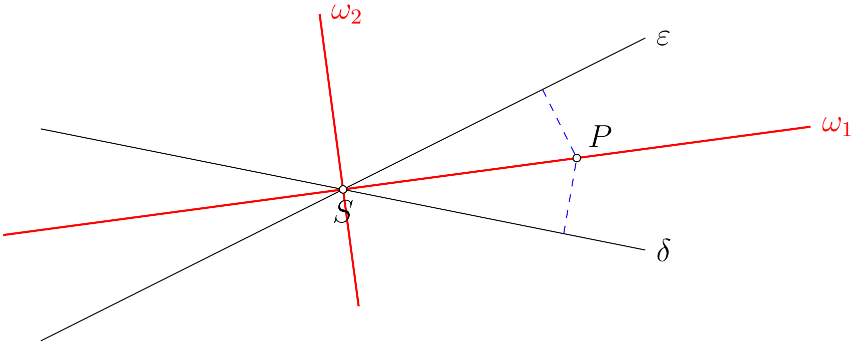
$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{n_1}$$

Wähle Punkt auf ε_1: $P(0, 0, 7)$

$$P\varepsilon_2 = \frac{|4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 7 + 2|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

7.7 Die Winkelhalbierenden zweier Ebenen

Schneiden sich zwei Ebenen ε und δ in der Geraden s, so gibt es zwei winkelhalbierende Ebenen ω_1 und ω_2. Das Bild zeigt zwei Ebenen und ihre Winkelhalbierenden in projizierender Lage.



Der Punkt $P(x, y, z)$ liegt genau dann auf einer der Winkelhalbierenden, wenn er von ε und δ den gleichen Abstand hat.

Da der Abstand eines Punktes von einer Ebene mit der Hesseschen Normalform berechnet werden kann, lässt sich die obige Aussage auch so formulieren:

$P \in \omega_1$ oder $P \in \omega_2$

$\dfrac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|Ex + Fy + Gz + H|}{\sqrt{E^2 + F^2 + G^2}}$

Um die Beträge weglassen zu können, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

Haben beide Zähler gleiches Vorzeichen, so gilt:

$$\omega_1\colon \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ex + Fy + Gz + H}{\sqrt{E^2 + F^2 + G^2}}$$

Haben beide Zähler unterschiedliche Vorzeichen, so gilt:

$$\omega_2\colon \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{Ex + Fy + Gz + H}{\sqrt{E^2 + F^2 + G^2}}$$

Beispiel

Bestimme die Winkelhalbierende der Ebenen

$\varepsilon\colon 2x - y + 2z + 3 = 0$ und $\delta\colon x + 4y + 8z - 5 = 0$.

1. Winkelhalbierende:

$\dfrac{2x - y + 2z + 3}{3} = \dfrac{x + 4y + 8z - 5}{9}$

$6x - 3y + 6z + 9 = x + 4y + 8z - 5$

$\omega_1\colon 5x - 7y - 2z + 14 = 0$

2. Winkelhalbierende:

$\dfrac{2x - y + 2z + 3}{3} = -\dfrac{x + 4y + 8z - 5}{9}$

$6x - 3y + 6z + 9 = -x - 4y - 8z + 5$

$\omega_2\colon 7x + y + 14z + 4 = 0$

8 Die Kugel

8.1 Die Kugelgleichung

Eine *Sphäre* (*Kugelfläche*) K ist durch ihren Mittelpunkt M und ihren Radius ϱ bestimmt.

Jeder Punkt $P \in K(M, \varrho)$ hat den Abstand ϱ von M. Daraus ergibt sich die *Gleichung einer Sphäre* für $\vec{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$:

$$K\colon \left|\vec{r} - \vec{r}_M\right| = \varrho$$

Mit der Beziehung $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ folgt dann:

$$K\colon \left(\vec{r} - \vec{r}_M\right) \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}_M\right) = \varrho^2 \quad \text{bzw.} \quad \left(\vec{r} - \vec{r}_M\right)^2 \ = \varrho^2$$

und in Koordinatenform:

$$K\colon (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = \varrho^2$$

Kugel und Sphäre

Es seien $M \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Punkt und $\varrho \in \mathbb{R}^+$.
Mit dem Begriff *Kugel* beschreiben wir die Punktmenge

$$K = \{P \in \mathbb{R}^3\colon |PM| \leq \varrho\} \quad \text{(Kugelkörper)}$$

Mit dem Begriff *Sphäre* beschreiben wir die Punktmenge

$$S = \{P \in \mathbb{R}^3\colon |PM| = \varrho\} \quad \text{(Kugelfläche)}$$

Im Folgenden werden gelegentlich die im Schulunterricht üblichen (aber unpräzisen) Begriffe *Kugel* und *Kugelgleichung* verwendet. Damit sind jedoch die *Sphäre* bzw. die *Spährengleichung* gemeint.

Beispiel 8.1

Sphäre mit $M(3, -1, 2)$ und $\varrho = 7$:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 &= 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 14 &= 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z &= 35 \end{aligned}$$

Eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

kann umgekehrt als Kugelgleichung gedeutet werden. Subtrahieren von d und quadratisches Ergänzen ergibt:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d=\varrho^2$$

Wegen $\varrho^2>0$ muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$a^2+b^2+c^2>4d$$

8.2 Schnitt von Kugel und Gerade

Sind die Gleichungen einer Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

und einer Kugel

$$K\colon (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = \varrho^2$$

gegeben, so löst man das Schnittproblem durch Einsetzen der Komponenten der Geradengleichung in die Kugelgleichung:

$$K\colon (x_A + tx_v - x_M)^2 + (y_A + ty_v - y_M)^2 + (z_A + tz_v - z_M)^2 = \varrho^2$$

und anschliessendem Auflösen nach t.

Abhängig von der Lösungsmenge der quadratischen Gleichung erhält man:

- zwei Lösungen t_1, t_2: zwei *Durchstosspunkte* P_1, P_2
- eine Lösung: t: ein *Berührpunkt* P
- keine Lösung: Die Gerade *meidet* die Kugel.

Beispiel 8.2

Schneide $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit der Kugel mit $M(-4, 2, 3)$ und $\varrho = 9$.

$$\begin{aligned} ([5 + 2t] + 4)^2 + ([2 + 2t] - 2)^2 + ([3 + t] - 3)^2 &= 81 \\ (2t + 9)^2 + (2t)^2 + (t)^2 &= 81 \\ 9t^2 + 36t + 81 &= 81 \\ t^2 + 4t &= 0 \\ t(t + 4) &= 0 \end{aligned}$$

$t_1 = 0 \Rightarrow P_1(5, 2, 3)$ und $t_2 = -4 \Rightarrow P_2(-3, -6, -1)$

8.3 Schnitt von Kugel und Ebene

Sind Gleichungen einer Kugel

$$K\colon (x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2=\varrho^2$$

und einer Ebene

$$\varepsilon\colon ax+by+cz+d=0$$

gegeben, so löst man das Schnittproblem wie folgt:

1. Gleichung der Lotgeraden $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
2. Mittelpunkt des Schnittkreises: $M' = g\cap\varepsilon$
3. Radius des Schnittkreises: $r^2=\varrho^2-d(M',\varepsilon)^2$

Geometrische Interpretation der Lösung:

- $r^2>0$: *Schnittkreis*
- $r^2=0$: *Berührpunkt*
- $r^2<0$: Die Ebene *meidet* die Kugel.

Beispiel 8.3

Gegeben: Kugel K mit $M(-7,-1,6)$ und $\varrho=5$
Ebene $\varepsilon\colon 4x+2y+z+3=0$

Gesucht: Mittelpunkt M' und Radius r des Schnittkreises.

- $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\varepsilon\cap g$: $0=4(-7+4t)+2(-1+2t)+(6+t)+3$
  $0=21t-21$
  $t=1 \quad\Rightarrow\quad M'(-3,1,7)$
- $d=\overline{MM'}=\sqrt{(-3+7)^2+(1+1)^2+(7-6)^2}=\sqrt{21}$
  $r^2=\varrho^2-d^2=25-21=4 \quad\Rightarrow\quad r=2$

8.4 Schnitt von zwei Kugeln

Gegeben: Gleichungen zweier Kugeln $K_1(M_1, \varrho_1)$ und $K_2(M_2, \varrho_2)$:

$$K_1\colon (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \varrho_1^2$$
$$K_2\colon (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = \varrho_2^2$$

1. Subtraktion der Kugelgleichungen: $\varepsilon\colon ax + by + cz + d = 0$ (Ebene des Schnittkreises)
2. Gerade durch die Kugelmittelpunkte: $g\colon \vec{r} = \vec{r}_{M_1} + t\overrightarrow{M_1M_2}$
3. Mittelpunkt des (allfälligen) Schnittkreises: $M' = g \cap \varepsilon$
4. Radius des Schnittkreises $r = \sqrt{r_1^2 - d^2}$ mit $d = |M_1M'|$

Geometrische Interpretation der Lösung:

- $|\varrho_1 - \varrho_2| < \overline{M_1M_2} < \varrho_1 + \varrho_2$: Die Kugeln *schneiden* sich.
- $|\varrho_1 - \varrho_2| = \overline{M_1M_2}$ Die Kugeln *berühren sich innen.*
- $\varrho_1 + \varrho_2 = \overline{M_1M_2}$ Die Kugeln *berühren sich aussen.*
- $|\varrho_1 - \varrho_2| > \overline{M_1M_2}$ Die Kugeln *liegen ineinander.*
- $\varrho_1 + \varrho_2 < \overline{M_1M_2}$ Die Kugeln *liegen auseineinander.*

Beispiel 8.4

Gegeben: Kugeln K_1 mit $M_1(4, 3, 1)$, $\varrho_1 = 7$ und K_2 mit $M_2(1, 0, 4)$, $\varrho_1 = 2$

Gesucht: Mittelpunkt M' und Radius r des (allfälligen) Schnittkreises von K_1 und K_2.

- $K_1\colon (x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 - 7^2 = 0$
  $K_2\colon (x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 4)^2 - 2^2 = 0$

  $K_1 - K_2$: $-6x - 6y + 6z - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon x + y - z + 6 = 0$

- $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\varepsilon \cap g$:

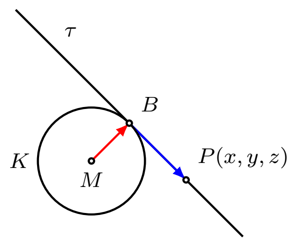
  $$(4 + t) + (3 + t) - (1 - t) + 6 = 0$$
  $$3t + 12 = 0$$
  $$t = -4 \quad \Rightarrow \quad M'(0, -1, 5)$$

- $d_1 = \operatorname{dist}(M_1, M') = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 + 1)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{48}$

  $r = \sqrt{r_1^2 - d^2} = \sqrt{49 - 48} = \sqrt{1} = 1$

8.5 Die Tangentialebene an eine Kugel

projizierende Darstellung von Kugel K und Tangentialebene τ:



Sind K und $B \in K$ gegeben, so ist $\overrightarrow{MB}$ sowohl Radiusvektor als auch Normalenvektor von τ und es gilt:

$$\tau\colon \big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big(\vec{r}_P - \vec{r}_B\big) = 0$$

Addiert man den Nullvektor im zweiten Faktor, so lässt sich die Gleichung der Tangentialebene in einer anderen Form darstellen:

$$\begin{aligned}
\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big(\vec{r}_P - \vec{r}_B\big) &= 0\\
\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big(\vec{r}_P - \vec{r}_M + \vec{r}_M - \vec{r}_B\big) &= 0\\
\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big[\big(\vec{r}_P - \vec{r}_M\big) + \big(\vec{r}_M - \vec{r}_B\big)\big] &= 0\\
\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big(\vec{r}_P - \vec{r}_M\big) + \big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big(\vec{r}_M - \vec{r}_B\big) &= 0\\
\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big(\vec{r}_P - \vec{r}_M\big) - \big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big) &= 0\\
\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big(\vec{r}_P - \vec{r}_M\big) - \varrho^2 &= 0\\
\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big(\vec{r}_P - \vec{r}_M\big) &= \varrho^2
\end{aligned}$$

Liegt ein Punkt P ausserhalb einer Kugel K, so existiert eine ganze Schar von Tangentialebenen an K durch P.

Die Tangentialebenen τ an eine Kugel sind jedoch eindeutig bestimmt, wenn eine die Kugel K meidende Gerade g mit $g \subset \tau$ gegeben ist.

Ist $g\colon \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{v}$ eine die Kugel $K\colon \big(\vec{r} - \vec{r}_M\big)^2 = \varrho^2$ meidende Gerade und $B(x, y, z)$ der gesuchte Berührpunkt, so gilt

$$\begin{aligned}
\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)^2 &= \varrho^2\\
\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\vec{v} &= 0\\
\big(\vec{r}_B - \vec{r}_M\big)\big(\vec{r}_A - \vec{r}_M\big) &= \varrho^2
\end{aligned}$$

Index