Aufgabe 8.1

$M(-1,-2,-1)$

$$\overrightarrow{MP} = \vec{r}_P - \vec{r}_M = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\varrho^2 = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 + 9 + 81 = 91$$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 91$

Aufgabe 8.2

(a) quadratische Ergänzung:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 - 8z = -1$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = -1 + 1 + 4 + 16$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 20$$

$M(-1,2,4),\ \varrho = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

(b) keine Kugel (wegen $-y^2$)

(c) quadratische Ergänzung:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y - 6z + 47 = 0$$
$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = -47 + 36 + 1 + 9$$
$$(x-6)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = -1$$

keine Kugel (negativer Radius)

(d) keine Kugel (Kreislinie in π_3)

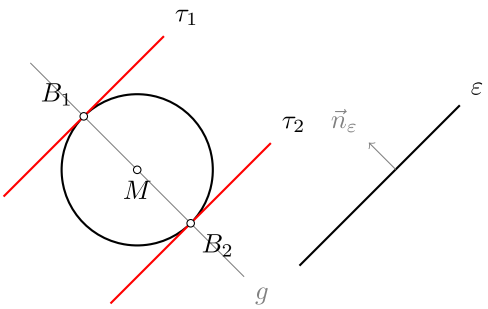
Aufgabe 8.3

$$M(9,3,-1),\ \varrho = \sqrt{62};\ g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
(x-9)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 &= \left(\sqrt{62}\right)^2 \\
([12]-9)^2 + ([3+t]-3)^2 + ([4+t]+1)^2 &= 62 \\
3^2 + t^2 + (t+5)^2 &= 62 \\
9 + t^2 + t^2 + 10t + 25 &= 62 \\
2\,t^2 + 10\,t - 28 &= 0 \\
t^2 + 5\,t - 14 &= 0 \\
(t-2)(t+7) &= 0 \\
t_1 &= 2 \\
t_2 &= -7
\end{aligned}
$$

Schnittpunkte: $P_1(12, 5, 6)$, $P_2(12, -4, -3)$

Aufgabe 8.4



Kugelfläche: $K\colon (x-8)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 49$

Gerade durch M normal zu ε: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$K \cap g$:

$$
\begin{aligned}
([8+2t]-8)^2 + ([1-6t]-1)^2 + ([z+3t]-3)^2 &= 49 \\
(2t)^2 + (-6t)^2 + (3t)^2 &= 49 \\
49t^2 &= 49 \\
t^2 &= 1 \\
t_1 &= 1 \\
t_2 &= -1
\end{aligned}
$$

Schnittpunkte: $S_1(10, -5, 6)$, $S_2(6, 7, 0)$

Die Schnittpunkte der Geraden mit der Kugelfläche sind die Berührpunkte der Tangentialebenen τ_1 und τ_2.

$S_1(10, -5, 6) \in \tau_1$: $d_1 = -\vec{n} \cdot \vec{r}_{S_1} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = -68$

$\tau_1\colon 2x - 6y + 3z - 68 = 0$

$S_2(6,7,0) \in \tau_2$: $d_2 = -\vec{n} \cdot \vec{r}_{S_2} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 30$

$\tau_2\colon 2x - 6y + 3z + 30 = 0$

Aufgabe 8.5

Gerade durch M normal zu ε: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} g \cap \varepsilon\colon 3(4+3t) + (7+t) + 2(3+2t) + 3 &= 0 \\ 9t + t + 4t + 12 + 7 + 6 + 3 &= 0 \\ 14t + 28 &= 0 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Mittelpunkt des Schnittkreises: $A(-2,5,-1)$

$d = |\vec{r}_A - \vec{r}_M| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} < \varrho$ (ok)

Schnittkreisradius: $r = \sqrt{\varrho^2 - d^2} = \sqrt{81-56} = \sqrt{25} = 5$

Aufgabe 8.6

(a) $\overline{M_1M_2} = \left|(-14,8,-6)^{\mathrm{T}}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\overline{M_1M_2} = 3\sqrt{2} < 5 = |\varrho_1 - \varrho_2|$

Die Kugeln liegen ineinander.

(b) $\overline{M_1M_2} = \left|(2,11,10)^{\mathrm{T}}\right| = 15$

$\overline{M_1M_2} = 15 = \varrho_1 + \varrho_2$

Die Kugeln berühren sich aussen.

(c) $|M_1M_2| = \left|(-3,5,-8)^{\mathrm{T}}\right| = 7\sqrt{2}$

$|\varrho_1 - \varrho_2| = 4 < \overline{M_1M_2} < 10 = \varrho_1 + \varrho_2$

Die Kugeln schneiden sich.

(d) $|M_1M_2| = \left|(2,6,3)^{\mathrm{T}}\right| = 7$

$\overline{M_1M_2} = 7 = |\varrho_1 - \varrho_2|$

Die Kugeln berühren sich innen.

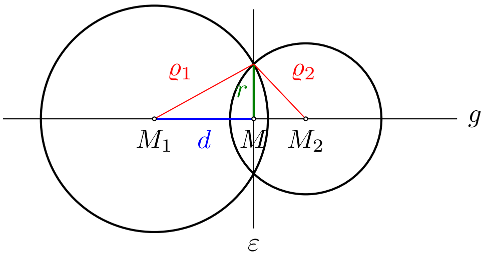
(e) $|M_1M_2| = \left|(4,-11,-4)^{\mathrm{T}}\right| = 3\sqrt{17}$

$\overline{M_1M_2} = 12.37 > 6 = \varrho_1 + \varrho_2$

Die Kugeln liegen auseinander.

Aufgabe 8.7

projizierende Darstellung der sich schneidenden Kugeln:



Schnittkreisebene ε:

$K_1\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 7$
$K_2\colon x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 16$

$$\begin{aligned} K_1\colon & x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 && = 7 \\ K_2\colon & x^2 \qquad\qquad + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 && = 16 \end{aligned}$$

Kugelgleichungen subtrahieren und vereinfachen:

$$\begin{aligned} -2x + 1 + 2y - 5 + 2z - 1 &= -9 \\ -2x + 2y + 2z + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$\varepsilon\colon x - y - z - 2 = 0$

Mittelpunkt M des Schnittkreises:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade durch die Kugelmittelpunkte: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g \cap \varepsilon$:

$$\begin{aligned} (1-t) - (2+t) + t - 2 &= 0 \\ -t - 3 &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

$M(2, 1, -1)$

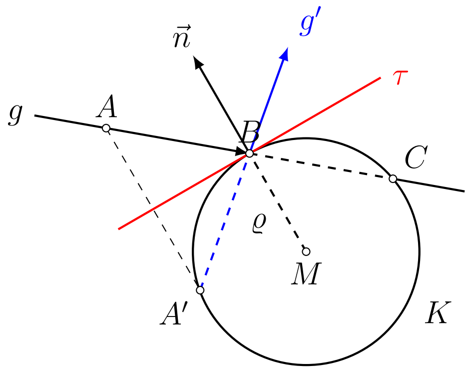
Radius r des Schnittkreises:

$$d = \overline{M_1M} = |\vec{r}_M - \vec{r}_{M_1}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{\varrho_1^2 - d^2} = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2$$

Aufgabe 8.8



$K\colon (x-8)^2 + y^2 + (z+7)^2 = 5$

$g \cap K\colon [x = 5+t,\ y = -4+t,\ z = -2-t]$

$$\begin{aligned}
(5+t-8)^2 + (-4+t)^2 + (-2-t+7)^2 &= 5 \\
(t-3)^2 + (t-4)^2 + (-t+5)^2 &= 5 \\
t^2 - 6t + 9 + t^2 - 8t + 16 + t^2 - 10t + 25 &= 5 \\
3t^2 - 24t + 45 &= 0 \\
t^2 - 8t + 15 &= 0 \\
(t-3)(t-5) &= 1 \\
t_1 &= 3 \\
t_2 &= 5
\end{aligned}$$

$B(8, -1, -5)$ (der zweite Schnittpunkt C ist weiter entfernt)

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_B = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = 9$$

$\tau\colon\ -y + 2z + 9 = 0$

$A(5, -4, -2)$ an τ spiegeln:

Lot von A auf τ : $\ell\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\tau \cap \ell$:

$$
\begin{aligned}
-(-4-t)+2(-2+2t)+9 &= 0\\
4+t-4+4t+9 &= 0\\
5t+9 &= 0\\
t_0 &= -9/5 = -1.8
\end{aligned}
$$

$t = 2t_0 = -3.6$ in ℓ einsetzen: $A'(5, -0.4, -9.2)$

$$\overrightarrow{A'B} = \vec{r}_B - \vec{r}_{A'} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -0.4 \\ -9.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -0.6 \\ 4.2 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$g'\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$