

Aufgabe 7.1

Richtungsvektoren von ε : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von ε : $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 16 \\ 64 \\ 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{n}_\varepsilon$

$A(5, -3, 8) \in \varepsilon$: $1 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 8 + D = 0$

$$D = -17$$

$$\varepsilon: x + 4y + 3z - 17 = 0$$

Aufgabe 7.2

Richtungsvektoren von ε : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ortsvektor zum Punkt $A(5, -3, 8)$: $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3

Setze $P(5, 0, 4)$ in ε : $2x - y + 3z - 22 = 0$ ein:

$$2 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 4 - 22 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\Rightarrow P \in \varepsilon$$

Aufgabe 7.4

Setze $P(-6, 8, -3)$ in ε : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein:

$$-6 = 1 + 5s + 1t \quad 5s + 1t = -7$$

$$8 = 0 - 1s + 2t \quad \Rightarrow \quad -1s + 2t = 8 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$$-3 = 3 + 2s - 1t \quad 2s - 1t = -6$$

$$\Rightarrow P \notin \varepsilon$$

Aufgabe 7.5

Die parallelen Ebenen ε und δ haben den gleichen Normalenvektor. Durch Einsetzen eines Punktes $P \in \delta$ kann D_δ von δ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} P(5, 1, 4) \in \delta: 2 \cdot x + (-1) \cdot y + 3 \cdot z + D_\delta &= 0 \\ 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 4 + D_\delta &= 0 \\ D_\delta &= -21 \end{aligned}$$

$$\delta: 2x - y + 3z - 21 = 0$$

Aufgabe 7.6

$$\vec{v}_g = \vec{n}_\varepsilon$$

$$P(2, 3, -1) \in \varepsilon: (-2) \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z + D = 0$$

$$\begin{aligned} (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + D &= 0 \\ D &= 3 \end{aligned}$$

$$\varepsilon: -2x + y + 2z + 3 = 0$$

Aufgabe 7.7

Achsenabschnitte:

$$A(a|0|0) \in \varepsilon: 4 \cdot a + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$B(0|b|0) \in \varepsilon: 4 \cdot 0 + (-3) \cdot b + 6 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow b = -4$$

$$C(0|0|c) \in \varepsilon: 4 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot c - 12 = 0 \Rightarrow c = 2$$

Spuren:

$$s_1: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow s_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_2: \vec{r} = \vec{r}_B + t \cdot \overrightarrow{BC} \Rightarrow s_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$s_3: \vec{r} = \vec{r}_C + t \cdot \overrightarrow{CA} \Rightarrow s_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.8

$\varepsilon \cap g$:

$$3 \cdot (-9 - 5 \cdot t) + 0 \cdot (11 + 2 \cdot t) + 5 \cdot (9 + 4 \cdot t) - 8 = 0$$

$$5 \cdot t + 10 = 0$$

$$t = -2$$

$$\text{Setze } t = -2 \text{ in } g \text{ ein} \Rightarrow g \cap \varepsilon = S(1, 7, 1)$$

Aufgabe 7.9

$\varepsilon \cap g$:

$$-3(4 + 2t) - 2(3 + 1t) + 2(-6 + 4t) - 1 = 0$$

$$0 \cdot t - 31 = 0$$

$$\text{keine Lösung} \Rightarrow g \parallel \varepsilon$$

Aufgabe 7.10

$\varepsilon \cap g$:

$$\begin{aligned} -3(-1 - 2t) + 1(2 + 2t) - 8(2 + 1t)11 &= 0 \\ 0 \cdot t + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Jedes $t \in \mathbb{R}$ ist Lösung. $\Rightarrow g \subset \varepsilon$

Aufgabe 7.11

Mittelpunkt der Strecke von $A(3, 8, 0)$ nach $B(11, 4, 4)$: $M(7, 6, 2)$

Der Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von μ .

$$\begin{aligned} M(7, 6, 2) \in \mu: 2 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 \cdot z + D &= 0 \\ 2 \cdot 7 + (-1) \cdot 6 + 1 \cdot 2 + D &= 0 \\ D &= -10 \end{aligned}$$

MNE: $\mu: 2x - y + z - 10 = 0$

Aufgabe 7.12

Die Koordinaten des gesuchten Schnittpunkts $S(x, y, z)$ müssen alle drei Ebenengleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z - 25 &= 0 & 2 \cdot x + 1 \cdot y + 3 \cdot z &= 25 \\ 5x + z - 44 &= 0 & \Rightarrow 5 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z &= 44 \\ 6x + 5y + 2z - 41 &= 0 & 6 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z &= 41 \\ \Rightarrow S(8, -3, 4) & & & \end{aligned}$$

Aufgabe 7.13

Normalenvektor von ε : $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor von g : $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\varphi' = \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{v}_g|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{v}_g|} = \arccos \frac{|10|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{25}} = 48.19^\circ$$

$$\varphi = 90 - \varphi' = 41.81^\circ \quad [\text{oder direkt mit } \arcsin(\dots)]$$

Aufgabe 7.14

Lot von $P(11, -2, 8)$ auf ε : $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Koordinatengleichungen von g in ε einsetzen:

$$\begin{aligned}
1 \cdot (11 + 1 \cdot t) - 1 \cdot (-2 - 1 \cdot t) + 2 \cdot (8 + 2 \cdot t) - 11 &= 0 \\
6 \cdot t + 18 &= 0 \\
t &= -3
\end{aligned}$$

$2t = -6$ in g einsetzen: $P'(5, 4, -4)$

Aufgabe 7.15

Lot von $P(8, -4, 9)$ auf ε : $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$g \cap \varepsilon \rightarrow S$:

$$\begin{aligned}
2 \cdot (8 + 2 \cdot t) - 1 \cdot (-4 - 1 \cdot t) + 2 \cdot (9 + 2 \cdot t) - 2 &= 0 \\
9 \cdot t + 36 &= 0 \\
t &= -4
\end{aligned}$$

$t = -4$ in g einsetzen: $S(0, 0, 1)$

Abstand: $|\overrightarrow{SP}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 12$

Aufgabe 7.15

Lot von $P(8, -4, 9)$ auf ε : $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$g \cap \varepsilon \rightarrow S$:

$$\begin{aligned}
2 \cdot (8 + 2 \cdot t) - 1 \cdot (-4 - 1 \cdot t) + 2 \cdot (9 + 2 \cdot t) - 2 &= 0 \\
9 \cdot t + 36 &= 0 \\
t &= -4
\end{aligned}$$

$t = -4$ in g einsetzen: $S(0, 0, 1)$

Abstand: $|\overrightarrow{SP}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 12$

Aufgabe 7.16

(a) $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -46 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -23 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|} = \arccos \frac{71}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{563}} = 25.55^\circ$$

(b) Schnitt von a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit ε :

$$(2 + 2t) + (5 + 2t) + 3(8 + 4t) - 39 = 0$$

$$-8 + 8t = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow A'(4, 7, 12)$$

Schnitt von b : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit ε :

$$(2 + 6t) + (5 + 9t) + 3(8 + 3t) - 39 = 0$$

$$-8 + 24t = 0$$

$$t = 1/3 \Rightarrow B'(4, 8, 9)$$

Schnitt von c : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit ε :

$$(2 + 12t) + (5 + 8t) + 3(8 + 4t) - 39 = 0$$

$$-8 + 32t = 0$$

$$t = 1/4 \Rightarrow C'(5, 7, 9)$$