

**Aufgabe 6.1**

(a) Ortsvektor zum Punkt  $A(5, -3, 2)$  auf der Geraden  $g$ .

(b) Richtungsvektor der Geraden  $g$

$$\begin{array}{l} -7 = 5 + 4t \qquad -12 = 4t \qquad t = -3 \\ \text{(c) } -6 = -3 + t \Leftrightarrow -3 = t \Leftrightarrow t = -3 \\ \qquad 11 = 2 - 3t \qquad 9 = -3t \qquad t = -3 \end{array}$$

$$\Rightarrow P(-7, -6, 11) \in g$$

**Aufgabe 6.2**

(a) Richtungsvektor:  $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Richtungsvektoren dürfen gestreckt/gestaucht werden)

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Wähle den Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt von  $g$  – hier  $A$ )

(b) Da die  $x$ -Komponente des Richtungsvektors null ist, muss die Gerade parallel zur  $yz$ -Ebene ( $\pi_2$ ) liegen. Also handelt es sich um eine *zweite Hauptgerade*.

**Aufgabe 6.3**

(a)  $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Die  $y$ -Komponente im Richtungsvektor kann einen willkürlichen Wert  $\neq 0$  haben.)

(b) Welche spezielle Lage hat diese Gerade?

Da der Richtungsvektor von  $g$  parallel zur  $y$ -Achse ist, steht  $g$  senkrecht zur  $xz$ -Ebene ( $\pi_3$ ). Daher handelt es sich um eine *drittprojizierende Gerade*.

### Aufgabe 6.4

- (a) Die Spurpunkte von  $g$  sind die (allfälligen) Schnittpunkte von  $g$  mit den Koordinatenebenen  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  und  $\pi_3$ .

$$S_1(x, y, 0): 0 = 6 + 2t \Rightarrow t = -3 \Rightarrow S_1(7, 12, 0)$$

$$S_2(0, y, z): 0 = 7 + 0t \Rightarrow \text{keine Lösung} \Rightarrow \text{kein } S_2$$

$$S_3(x, 0, z): 0 = 9 - t \Rightarrow t = 9 \Rightarrow S_3(7, 0, 24)$$

- (b) Da die  $x$ -Komponente des Richtungsvektors von  $g$  null ist, liegt  $g$  parallel zur  $\pi_2$  (2. Hauptgerade). Deshalb kann es nur die zwei Spurpunkte  $S_1$  und  $S_3$  geben.

### Aufgabe 6.5

- die Richtungsvektoren sind kollinear:  $-\frac{2}{5} \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

- Prüfe, ob z. B.  $A(8, 3, -11) \in h$ :

$$\begin{array}{rcl} 8 = -4 + 4t & 12 = 4t & t = 3 \\ 3 = 9 - 2t & \Rightarrow -6 = -2t & \Rightarrow t = 3 \Rightarrow A \in h \\ -11 = 7 - 6t & -18 = -6t & t = 3 \end{array}$$

Also:  $g = h$

### Aufgabe 6.6

die Richtungsvektoren sind kollinear, denn  $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$A(5, 9, -9) \in h$ ?

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 12 = 2t \\ 1 = -2t \\ -14 = 6t \end{array}$$

keine Lösungen,  $A \notin h \Rightarrow g \parallel h$ .

### Aufgabe 6.7

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

Gibt es einen gemeinsamen Punkt  $\{S\} = g \cap h$ ?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -2s - 3t = -10 \\ 5s - 5t = -4 \\ 3s + 2t = 7 \end{array}$$

keine Lösungen

Die Geraden  $g$  und  $h$  sind windschief.

### Aufgabe 6.8

- Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.
- Gibt es einen gemeinsamen Punkt  $\{S\} = g \cap h$ ?

$$\begin{array}{l} -15 + 2s = -17 + 6t \quad 2s - 6t = -2 \\ -1 + s = -2 + 3t \quad \Rightarrow \quad s - 3t = -1 \quad \Rightarrow \quad s = 5 \\ 19 - 2s = 5 + 2t \quad -2s - 2t = -14 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \end{array}$$

Schnittpunkt:  $S(-5, 4, 9)$

- spitzer Schnittwinkel:  $\varphi = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \arccos \frac{11}{3 \cdot 7} = 58.41^\circ$

### Aufgabe 6.9

- Die Richtungsvektoren sind kollinear:  $2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

- Teste, ob  $A(3, 9, -6) \in h$ :

$$\begin{array}{l} 3 = -9 + 4t \quad 12 = 4t \quad t = 3 \\ 9 = 7 + 2t \quad \Rightarrow \quad 2 = 2t \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad A \notin h \quad \Rightarrow \quad g \parallel h \\ -6 = 2 - 4t \quad -8 = -4t \quad t = 2 \end{array}$$

- $d(g, h) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}_g|}{|\vec{v}_g|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{12}{3} = 4$

(Statt mit  $\vec{v}_g$  hätte man auch mit dem kollinearen Richtungsvektor  $\vec{v}_h$  rechnen können)

### Aufgabe 6.10

- Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

$$\begin{aligned} \bullet \quad d(g, h) &= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{v}_g \times \vec{v}_h)|}{|\vec{v}_g \times \vec{v}_h|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{|-90|}{15} = 6 \end{aligned}$$

- Da  $\vec{v}_g \not\parallel \vec{v}_h$  und  $d \neq 0$  sind die Geraden windschief.

### Aufgabe 6.11

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}, |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 169 + 4} = 15$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{64 + 64 + 16} = 12$$

$$w_\alpha: \vec{r} = \vec{r}_A + t[4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}]$$

$$w_\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t_\alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (vereinfacht)}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}, |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}| = 15$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9$$

$$w_\beta: \vec{r} = \vec{r}_B + t[3\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{BC}]$$

$$w_\beta: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + t_\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (vereinfacht)}$$

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, |\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AC}| = 12$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}| = 9$$

$$w_\gamma: \vec{r} = \vec{r}_C + t[3\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CB}]$$

$$w_\gamma: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t_\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (vereinfacht)}$$

$w_\alpha \cap w_\beta$ :

$$\begin{aligned} -3 + 5t_\alpha &= 2 \\ 7 - 8t_\alpha &= -7 + 2t_\beta &\Rightarrow & \begin{matrix} t_\alpha = 1 \\ t_\beta = 3 \end{matrix} &\Rightarrow & S(2, -1, 5) \\ 4 + t_\alpha &= 2 + t_\beta \end{aligned}$$

Es genügt zu prüfen, ob  $S \in w_\gamma$ :

$$\begin{aligned} 2 &= 5 + t_\gamma \\ -1 &= -1 &\Rightarrow & t_\gamma = -3 \\ 5 &= 8 + t_\gamma \end{aligned}$$

Also:  $w_\alpha \cap w_\beta \cap w_\gamma = \{S(2, -1, 5)\}$