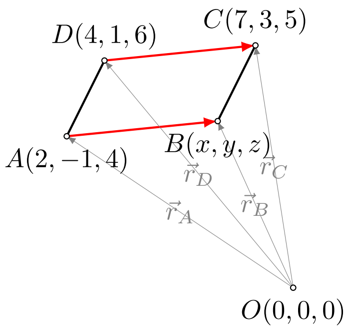
Aufgabe 1



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad B(5,1,3)$

Aufgabe 2

Gegeben: $A(1,5,-4)$ und Mitte $M(-9,8,4)$ der Strecke AB.

Gesucht: B

$$\vec{r}_M = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right) \quad \text{(Mittelpunktsformel)}$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A = 2\begin{pmatrix}-9\\8\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-19\\11\\12\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad B(-19,11,12)$

Aufgabe 3

Gesucht: Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken $A(7,-3,9)$, $B(-5,1,2)$, $C(0,6,3)$ und $D(8,4,4)$

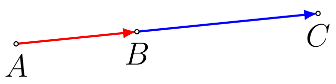
$$\vec{r}_S = \tfrac{1}{4}\cdot\left[\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\right] \quad \text{(Schwerpunktformel)}$$

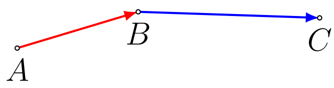
$$\vec{r}_S = \tfrac{1}{4}\cdot\left[\begin{pmatrix}7\\-3\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix}\right]$$

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix}2.5\\2\\4.5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(2.5,2,4.5)$$

Aufgabe 4

Wenn $A(3,5,-8)$, $B(1,6,-3)$, $C(9,2,-23)$ auf einer Geraden liegen, dann sind z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ linear abhängig (links). Andernfalls sind die Vektoren linear unabhängig (rechts).





$$\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0} \; (*) \qquad \text{mit} \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 5 & -20 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4\beta$$

Die Gleichung $(*)$ hat unendlich viele Lösungen. Also sind $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ linear abhängig. Also liegen A, B und C auf einer Geraden.

Aufgabe 5

Punkte $A(-7,1,3)$ und $B(9,-3,11)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \tfrac{3}{8}\overrightarrow{AB} \\ \vec{r}_P - \vec{r}_A &= \tfrac{3}{8}\overrightarrow{AB} \\ \vec{r}_P &= \vec{r}_A + \tfrac{3}{8}\overrightarrow{AB} \\ \vec{r}_P &= \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{8}\begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P(-1,-0.5,6) \end{aligned}$$

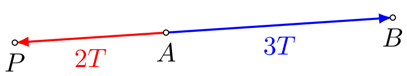
Aufgabe 6

Gegeben: Punkte $A(8,-6,7)$, $B(17,-9,13)$ und $P(2,-4,3)$

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

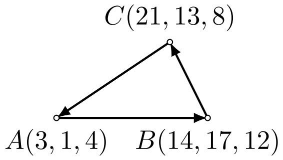
$$\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -6 &= 9k \\ 2 &= -3k \\ -4 &= 6k \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} k &= -2/3 \\ k &= -2/3 \\ k &= -2/3 \end{aligned}$$

$k = -2/3$; also teilt P die Strecke AB.



P teilt die Strecke AB aussen im Verhältnis $2:5$.

Aufgabe 7



$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{121 + 256 + 64} = \sqrt{441} = 21$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{49 + 16 + 16} = \sqrt{81} = 9$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \left|\begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{324 + 144 + 16} = \sqrt{484} = 22$$

$u = 9 + 21 + 22 = 52$

Aufgabe 8

$$|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{256 + 144 + 225} = \sqrt{625} = 25$$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.64 \\ -0.48 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.64 \\ 0.48 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

$A(1, y, 5),\ B(7, 6, 3)$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}| &= 11 \\
\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6-y \\ -2 \end{pmatrix}\right| &= 11 \\
\sqrt{36 + (6-y)^2 + 4} &= 11 \\
\sqrt{40 + (6-y)^2} &= 11 \\
40 + (6-y)^2 &= 121 \\
(6-y)^2 &= 81 \\
6 - y &= \pm 9 \\
y_1 &= -3 \\
y_2 &= 15
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

$A(11, 8, -9)$; $B(6, -3, 5)$; Punkt auf z-Achse: $P(0, 0, z)$

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{PA}\right| &= 3 \cdot \left|\overrightarrow{PB}\right| \\
\left|\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -9-z \end{pmatrix}\right| &= 3 \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5-z \end{pmatrix}\right| \\
\sqrt{121 + 64 + (-9-z)^2} &= 3 \cdot \sqrt{36 + 9 + (5-z)^2} \qquad ||^2 \\
185 + 81 + 18z + z^2 &= 9 \cdot \left[36 + 9 + 25 - 10z + z^2\right] \\
z^2 + 18z + 266 &= 9z^2 - 90z + 630 \\
0 &= 8z^2 - 108z + 364 \\
z_1 &= 6.5 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 0, 6.5) \\
z_2 &= 7 \quad \Rightarrow \quad P_2(0, 0, 7)
\end{aligned}$$

Aufgabe 11

(a) $P(0, 3, 0)$ liegt auf der y-Achse

(b) $Q(-1, 0, 4)$ liegt in der xz-Ebene

Aufgabe 12

(a) $P(4, -7, 3)$ an der xy-Ebene spiegeln: $P'(4, -7, -3)$

(b) $P(4, -7, 3)$ an der z-Achse spiegeln: $P'(-4, 7, 3)$

(c) $P(4, -7, 3)$ am Ursprung spiegeln: $P'(-4, 7, -3)$

(d) $P(4, -7, 3)$ am Punkt $Z(-1, -6, 1)$ spiegeln: $P'(-6, -5, -1)$