Aufgabe 3.1

(a) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 7\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{v} = 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (Achtung: Reihenfolge)

(c) $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.2

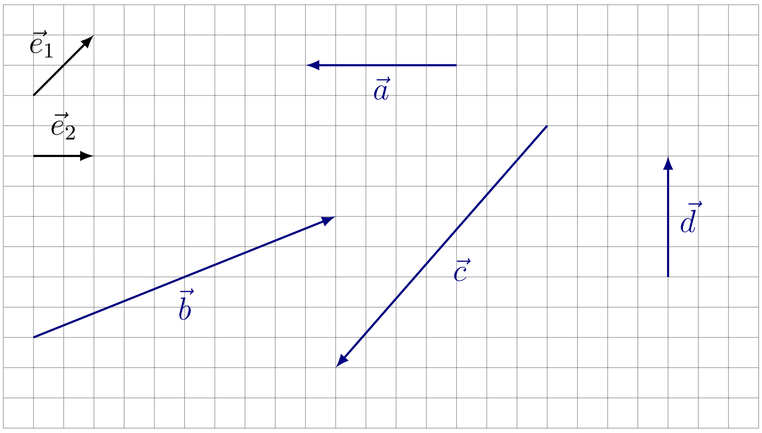
(a) $\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{2}\vec{a} - 5\vec{c} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

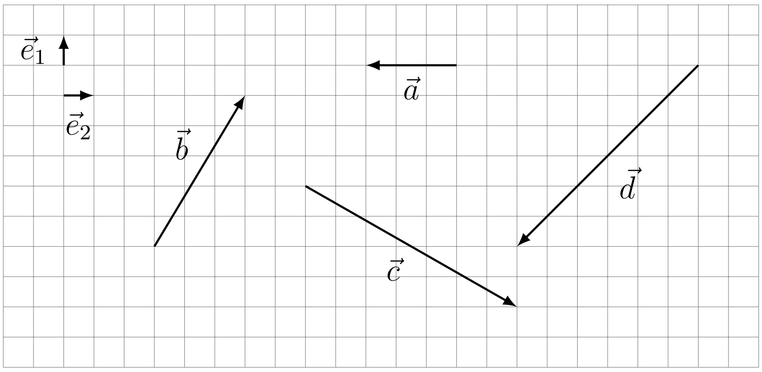
(c) $-\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -18 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.3

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

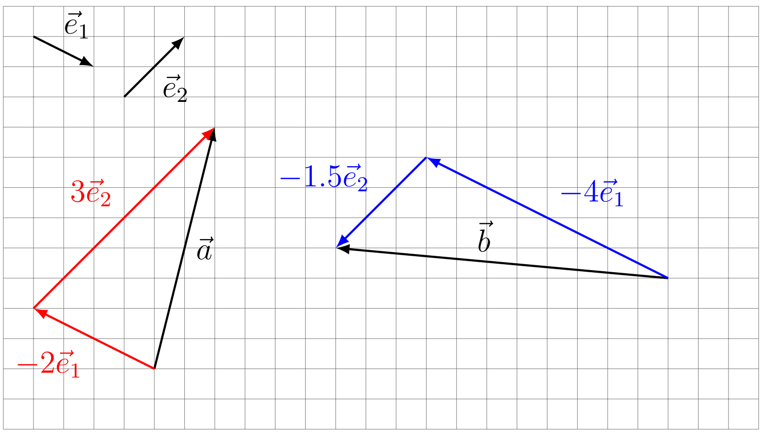


Aufgabe 3.4



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.5



$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1.5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.6

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Eine Vektorkette (Linearkombination) ist genau dann geschlossen, wenn ihre Summe der Nullvektor ist.

$$\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = 3\vec{c}$$

$$3\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = \tfrac{1}{3}\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.7

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 42 \\ 36 \\ -18 \\ 45 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix}$

(a) Ja, denn $\frac{2}{3}\vec{a} = \vec{b}$

(b) Nein, denn gemäss Teil (a) sind die beiden Vektoren kollinear und damit linear *abhängig*.

alternative Begründung: Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig wären, so darf die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$$

nur die Lösung $\alpha = \beta = 0$ haben. Wenn wir nun die Gleichung in (a) umformen, so erhalten wir

$$\tfrac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$$

was bedeutet, dass es mit $\alpha = \frac{2}{3}$ und $\beta = 1$ neben $\alpha = \beta = 0$ eine weitere (und damit unendlich) viele Lösungen gibt.

Aufgabe 3.8

Die beiden Vektoren sind parallel zu einer Geraden.

Aufgabe 3.9

Die drei Vektoren sind alle parallel zu einer Ebene.

Aufgabe 3.10

Es ist nicht nötig, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4\alpha + \beta + 5\gamma &= 0 \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen, weil *drei* Vektoren im *zweidimensionalen Raum* immer linear abhängig sind.

Aufgabe 3.11

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \stackrel{\text{rref}}{\Longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Variablenspalten, die keine Stufenspalten sind, können mit beliebigen Werten besetzt werden. Hier ist es die 3. Spalte (für γ):

z. B. $\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 5,\ \beta = -1$

Kontrolle: $\vec{v} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

z. B. $\gamma = 1 \Rightarrow \alpha = 3,\ \beta = -2$

Kontrolle: $\vec{v} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

usw.

Aufgabe 3.12

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \stackrel{\text{rref}}{\Longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die letzte Zeile bedeutet $0 = 1$ (Widerspruch); somit gibt es keine Lösung und $\vec{v}$ lässt sich nicht durch die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.

Geometrische Deutung: Die drei Vektoren sind parallel zu einer Ebene (komplanar) aber der Vektor $\vec{v}$ nicht.

Aufgabe 3.13

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die alle Variablenspalten Stufenspalten sind, gibt es die (eindeutige) Lösung $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$.

Kontrolle: $\vec{v} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.14

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

eindeutige Lösung: $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$

Aufgabe 3.15

Für Kollinearität muss es eine Zahl k mit $\vec{a} = k\vec{b}$ geben:

$$\begin{aligned} 16 &= k \cdot x \\ -24 &= k \cdot 18 \\ -12 &= k \cdot z \end{aligned}$$

Die mittlere Gleichung lässt sich nach k auflösen: $k = \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3}$

Einsetzen in die erste und letzte Gleichung:

$x = 16 : k = 16 : \left(-\frac{4}{3}\right) = -12$

$z = -12 : k = -12 : \left(-\frac{4}{3}\right) = 9$

$$\Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$